Schnellkurs und Übersicht zur Bestimmung der maximalen Messunsicherheit und kombinierten Messunsicherheit

Zum Messergebnis gehören immer eine Angabe der Messunsicherheit und nur signifikante Stellen

1. Beim Messen arbeiten wir mit Näherungswerten (!), u. A. bedingt durch die Genauigkeiten der von uns verwendeten Messgeräte.

2. Messgeräte besitzen nur eine bestimmte Ablesegenauigkeit, die durch die Skalenteilung vorgegeben ist. Zum Beispiel können Sie bei Messungen mit einem Lineal nur auf den Millimeter genau ablesen, im allerbesten Fall auf ±0,5 mm (=1/2 Skalenteil) schätzen oder unter schlechteren Bedingungen (raue Kante des Werkstücks oder Strichstärke von Linien) nur auf z. B. ±2 mm genau messen. Es unterliegt also Ihrer Einschätzung eine Messunsicherheit (den sogenannten Messfehler) realistisch anzugeben.

3. Darüber hinaus haben alle Messgeräte eine – vom Hersteller angegebenen – systematische Messtoleranz. Ein vierstelliges Digitalgerät im 20 V Messbereich kann nur auf 10 mV genau abgelesen werden (z. B. 18,13 V). Oft ist die Gerätetoleranz, die sich aus einer prozentualem Angabe und Digitalisierungsunsicherheit zusammensetzt, jedoch größer als die Ablesegenauigkeit. Die Digitalisierungstoleranz ist die Schwankungsbreite der letzten Stelle (LSB: last significant bit), beträgt mindestens ±1 LSB (±1 Digit) und ist der Quantisierung der AD-Wandlung geschuldet. Beträgt die systematische Unsicherheit z. B. 2,5 % ±5 Digit, wäre das anzugebende Ergebnis (18,1 ± 0,5) V.

4. Schätzen Sie bei jeder Messung die Messungenauigkeiten des verwendeten Messverfahrens realistisch ab (Genauigkeit und Teilung der Anzeige, Ablesegenauigkeit, systematische Unsicherheit) und geben Sie zu ihrem Messwert stets die maximale Unsicherheit an. Die maximale Unsicherheit ist eine physikalische Größe und hat immer die Einheit der Messgröße.

5. Geben Sie beim Ergebnis nur die signifikanten Stellen an. Die Anzahl dieser Stellen wird von der maximale Unsicherheit bestimmt. Die Messwert wird nicht genauer angegeben als es die Messunsicherheit zulässt. Beachten Sie, dass z. B. die Angaben (3,5 ± 0,2) kg und (3,50 ± 0,15) kg etwas anderes bedeuten.

6. Tragen Sie die maximale Unsicherheit an den Messpunkten in ihre Diagramme ein (sog. Fehlerbalken).

Kombinierte Unsicherheit bei indirekt messbaren Größen (Abschätzung der maximalen Unsicherheit)

Viele Messgrößen sind nur indirekt messbar. Auch für diese müssen Abschätzungen der Unsicherheit vorgenommen werden. Die maximale Unsicherheit indirekt messbarer Größen ergibt sich aus der kombinierten Unsicherheit der maximalen Unsicherheiten der direkt gemessenen Größen:

1. Die Größe $y = T^2$ ist nur indirekt messbar. Wie groß ist ihre Messunsicherheit, wenn für die direkt gemessene Größe T die maximale Unsicherheit ΔT festgelegt wurde? Zu untersuchen wäre die Änderung der Größe y, wenn die Größe T um $\pm\Delta T$ schwankt. Diese Änderung kann sofort durch den Anstieg $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}T}$ erhalten werden. Es gilt:
$$\Delta y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}T}\,\Delta T \quad .$$
Daraus erhält man die maximale Unsicherheit von T^2 zu $\Delta(T^2) = 2T \cdot \Delta T$. Man sieht, dass die maximale Unsicherheit $\Delta(T^2)$ nicht nur von ΔT, welches ja für alle Messwerte T konstant sein kann, sondern zusätzlich vom Messwert T abhängt und zusammen mit T wächst oder fällt. Das ist verständlich, da der Anstieg eine Funktion von T ist.

2. Meist sind indirekt messbare Größen, wie z. B. Dichte oder Geschwindigkeit, nur über die Messung von mehreren direkt messbaren Größen bestimmbar. Allgemein gesprochen sei die Größe $F = f(x, y, z)$ nur über die gemessenen Größen $x \pm \Delta x$, $y \pm \Delta y$ und $z \pm \Delta z$ bestimmbar (Δx, $\Delta y, \ldots$ seien die maximalen Unsicherheiten). Gesucht ist nun die maximale Unsicherheit ΔF. Auch hier sind die Anstiege der einzelnen Abhängigkeiten (partielle Differentiation) entscheidend. Für die maximale Unsicherheit ΔF gilt generell:
$$\Delta F = \pm\left\{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial z}\Delta z\right|\right\} \quad . \tag{1}$$
Da es sich um eine maximale Unsicherheit handelt, werden die Beträge addiert. Die Formel erscheint kompliziert, ist aber einfach handhabbar. Ein Beispiel sei das Volumen eines Zylinders $V = h\pi d^2/4$, mit dem Durchmesser $d \pm \Delta d$ und der Höhe $h \pm \Delta h$. Die Ableitungen sind $\frac{\partial V}{\partial h} = \pi d^2/4$ und $\frac{\partial V}{\partial d} = h\pi d/2$. Eingesetzt ergibt das:
$$\Delta V = \pm\left\{\left|\frac{\pi d^2}{4}\Delta h\right| + \left|\frac{h\pi d}{2}\Delta d\right|\right\} \quad .$$
Alle Größen sind schnell eingesetzt und die maximale Unsicherheit ΔV kann sofort berechnet werden. Sie hat hier die Dimension eines Volumens.

3. Es geht aber noch einfacher: Oft ist die relative Unsicherheit aussagekräftiger als die absolute Unsicherheit, da dabei die Unsicherheit in Relation zur Messgröße gesetzt wird. Die relative Unsicherheit der Messgröße x wird definiert als $\frac{\Delta x}{x}$ oder als prozentuale maximale Unsicherheit $\frac{\Delta x}{x} \cdot 100$ in Prozent. Berechnet man im obigen Beispiel die relative maximale Unsicherheit, so folgt:
$$\frac{\Delta V}{V} = \pm\left\{\left|\frac{\frac{\pi d^2}{4}\Delta h}{\frac{h\pi d^2}{4}}\right| + \left|\frac{\frac{h\pi d}{2}\Delta d}{\frac{h\pi d^2}{4}}\right|\right\} = \pm\left\{\left|\frac{\Delta h}{h}\right| + \left|2\frac{\Delta d}{d}\right|\right\} \quad .$$
Daraus ergibt sich folgender Merksatz:
Bei einer multiplikativen Verknüpfung (Multiplikation und Division) der Messgrößen addieren sich die Beträge der relativen maximale Unsicherheiten der einzelnen

Messgrößen. Noch einfacher gesagt: *Die prozentualen maximalen Unsicherheiten addieren sich bei multiplikativer Verknüpfung.*
Beachten Sie dabei, dass die relativen maximalen Unsicherheiten der Größen, die mit der Potenz n eingehen, n -mal berücksichtigt werden müssen.

4. *Bei einer additiven Verknüpfung von Messgrößen (es kann sich dabei ja nur um gleiche Größen, wie zum Beispiel Temperaturen, handeln) addieren sich die Beträge der absoluten maximalen Unsicherheiten.* Bestimmt man eine Temperaturdifferenz aus den Messwerten $T_1 \pm \Delta T$ (z.B. 300 K ± 1 K) und $T_2 \pm \Delta T$ (z. B. 290 K ± 1 K), so ergibt sich $(T_1 - T_2) \pm 2\Delta T$ (also 10 K ± 2 K).

5. Bei multiplikativer und additiver Verknüpfung in einer Formel kann man die oben genannten Rechenregeln auch stückweise benutzen. Schneller und einfacher geht es jedoch, wenn man gleich über die partiellen Ableitungen geht.

6. Rechenregeln zur Abschätzung der maximalen Unsicherheiten für einige funktionale Zusammenhänge zwischen indirekter Messgröße F und den direkten Messgrößen $x \pm \Delta x$ und $y \pm \Delta y$:

Funktionaler Zusammenhang	Ableitungen	maximale Unsicherheit ΔF	Relative Unsicherheit $\frac{\Delta F}{F}$
$F = \sin x$	$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \cos x$	$\lvert\cos x\, \Delta x\rvert$	$\left\lvert\frac{1}{\tan x}\, \Delta x\right\rvert$
$F = \ln x$	$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$	$\left\lvert\frac{1}{x}\, \Delta x\right\rvert$	$\left\lvert\frac{\Delta x}{x \ln x}\right\rvert$
$F = xy$	$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = y$		
	$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = x$	$\lvert y\, \Delta x\rvert + \lvert x\, \Delta y\rvert$	$\left\lvert\frac{\Delta x}{x}\right\rvert + \left\lvert\frac{\Delta y}{y}\right\rvert$
$F = \frac{x}{y}$	$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y}$		
	$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = -\frac{x}{y^2}$	$\left\lvert\frac{1}{y}\, \Delta x\right\rvert + \left\lvert\frac{x}{y^2}\, \Delta y\right\rvert$	$\left\lvert\frac{\Delta x}{x}\right\rvert + \left\lvert\frac{\Delta y}{y}\right\rvert$
$F = x^2$	$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = 2x$	$\lvert 2x\, \Delta x\rvert$	$\left\lvert 2\frac{\Delta x}{x}\right\rvert$
$F = \tan x$	$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left\lvert\frac{1}{\cos^2 x} \Delta x\right\rvert$	$\left\lvert\frac{\Delta x}{\sin x \cos x}\right\rvert$
$F = x \pm y$	$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = 1$		
	$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = \pm 1$	$\lvert\Delta x\rvert + \lvert\Delta y\rvert$	$\frac{\lvert\Delta x\rvert + \lvert\Delta y\rvert}{\lvert x \pm y\rvert}$

Die Möglichkeit der Verkleinerung der Messungenauigkeiten durch vielfach wiederholte Messung einer Größe

In den meisten Experimenten wird man mit einer Messung, einer zusätzlichen Kontrollmessung und der abgeschätzten maximalen Unsicherheit arbeiten müssen. Wenn man viel

Aufwand treibt, kann man die Messungenauigkeiten einer direkt gemessenen Größe verkleinern, indem man z. B. ein und dieselbe Messung sehr oft (n-mal) wiederholt und dann statistische Betrachtungen durchführt.

Der *wahrscheinlichste Wert* der direkt gemessenen Größe x (Messwerte x_i mit $i = 1, ..., n$ und $n \geq 6$) ist dann der arithmetische Mittelwert $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$. Man definiert die Abweichungen der Messwerte vom wahrscheinlichsten Wert als $v_i = \overline{x} - x_i$. Wenn diese Abweichungen symmetrisch um den wahrscheinlichsten Wert streuen, verschwindet ihre Summe (gleich viele positive und negative Abweichungen) und man spricht von zufälligen Messunsicherheiten mit einer statistischen Verteilung (gaußsche Glockenkurve).

Man definiert die *mittleren Unsicherheiten der Einzelmessung (Standardabweichung)* als

$$s_X = \pm \sqrt{\frac{\sum (v_i)^2}{n-1}} \quad .$$

Diese Standardabweichung besagt, dass zwischen den Werten $\bar{x} - s_X$ und $\bar{x} + s_X$ ca. 68 % aller Messwerte liegen bzw. ein beliebiger Messwert mit 68%-iger Wahrscheinlichkeit in diesem Bereich zu finden ist. Dieser Bereich ist genau der von den Wendepunkten der Glockenkurve eingeschlossene Bereich. Die Standardabweichung gibt die Toleranz einer einzelnen Messung an.

Für uns wichtiger ist die *mittlere Unsicherheit des Mittelwerts*, also die mittlere Unsicherheit des wahrscheinlichsten Werts unserer Messgröße: Diese Messunsicherheit wird auch *Vertrauensbereich* genannt:

$$\overline{s_X} = \pm \sqrt{\frac{\sum (v_i)^2}{n(n-1)}} \quad .$$

Das Ergebnis der vielfach wiederholten Messung einer direkt gemessenen physikalischen Größe lautet also (Mittelwert plus/minus Vertrauensbereich):

$$\overline{x} \pm \overline{s_X} \quad .$$

Für die Bestimmung des Vertrauensbereichs $\overline{s_F}$ einer indirekt gemessenen Größe $F = f(x, y, ...)$ aus den Messgrößen $\overline{x} \pm \overline{s_X}$ und $\overline{y} \pm \overline{s_Y}$ wird wieder die kombinierte Unsicherheit verwendet. Bei statistisch ermittelten Unsicherheiten ersetzt man die lineare Addition ($c = a + b$) durch eine *pythagoräische Addition* ($c = \sqrt{a^2 + b^2}$), da man hier davon ausgeht, dass sich Messunsicherheiten auch zum Teil kompensieren können (Die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist kürzer als die Summe der beiden Katheten). Für die kombinierte Unsicherheit gilt deshalb (vgl. Gleichung (1)):

$$\overline{s_F} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \overline{s_X}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \overline{s_Y}\right)^2 + ...} \quad .$$

Die relative Unsicherheit der indirekt gemessenen Größe F ist dann definiert als $\overline{s_F}/F$.

Die oben genannte Rechenregeln gelten auch für den Fall der kombinierten Unsicherheiten mit Vertrauensbereichen, nur das hierbei nicht linear, sondern pythagoräisch addiert wird:

1. *Bei multiplikativer Verknüpfung der Messgrößen addieren sich die relativen Unsicherheiten pythagoräisch.*

2. *Bei additiver Verknüpfung der Messgrößen addieren sich die absoluten Unsicherheiten der Messgrößen pythagoräisch.*

In Fällen, in denen nur eine von mehreren Messgrößen vielfach gemessen wurde, ist natürlich wieder die maximale Unsicherheit mit linearer Addition zu verwenden. Als maximale Unsicherheit der vielfach gemessenen Größe wird dann der Vertrauensbereich eingesetzt, für alle anderen Größen deren maximale Unsicherheit.