

Induktionsgesetz (E13)

Ziel des Versuches

Es soll verifiziert werden, dass die zeitliche Änderung eines magnetischen Flusses, hervorgerufen durch die Änderung der Flussdichte, eine Spannung induziert. Dabei lernen Sie zwei Effekte, Selbstinduktion und Gegeninduktion, zu unterscheiden.

Theoretischer Hintergrund

Wird eine Leiterschleife, die eine Fläche A mit der Flächennormalen \vec{n} umrandet, von der magnetischen Flussdichte \vec{B} durchsetzt, so ist der von der Schleife umschlossene Fluss Φ definiert durch:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot \vec{n} dA \quad (1)$$

Das Induktionsgesetz besagt, dass die zeitliche Änderung von Φ eine Spannung U_{ind} in der Leiterschleife induziert:

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} \quad (2)$$

Das negative Vorzeichen entspricht der lenzschen Regel, nach welcher die induzierte Spannung (damit auch der induzierte Strom und das ihn begleitende Magnetfeld) die sie verursachende Flussänderung zu hemmen versucht. $\dot{\Phi}$ kann sowohl durch eine zeitliche Änderung des Magnetfeldes als auch durch eine Änderung der von \vec{B} durchsetzten Fläche erzeugt werden.

Wird die magnetische Flussdichte \vec{B} in einer langen, luftgefüllten Zylinderspule erzeugt, so gilt:

$$|\vec{B}| = \frac{N_1}{\ell} I \mu_0 \quad (3)$$

N_1 ist die Windungszahl und ℓ die Länge der Spule. I ist der Strom, der die Spule durchfließt. Anstelle einer Leiterschleife wird eine sehr kurze Spule mit N_2 Windungen und der Querschnittsfläche A_2 verwendet. (Im Folgenden werden die zur langen Spule gehörigen Größen mit 1, die der kurzen mit 2 indiziert.) Da in jeder einzelnen Windung die Spannung nach Gl. (2) induziert wird, ist die in der gesamten Spule erzeugte Spannung gegeben durch:

$$U_{\text{ind}} = -N_2 \dot{\Phi} \quad (4)$$

Gl. (4) kann mit Hilfe der Gln. (1,3) auf die zeitliche Änderung des die lange Spule durchfließenden Stroms umgerechnet werden. Für $\vec{A}_2 \parallel \vec{B}$ ergibt sich:

$$U_{\text{ind}} = -N_2 \dot{\Phi} = -\mu_0 A_2 \frac{N_1 N_2}{\ell} \dot{I} = -M \dot{I} \quad (5)$$

Im letzten Schritt wurde die *Gegeninduktivität* M definiert, die von der geometrischen Anordnung der beiden Spulen abhängt. Der gesamte physikalische Vorgang wird als *Gegeninduktion* bezeichnet.

Die Änderung des von der langen Spule erzeugten Magnetfeldes induziert jedoch nicht nur in der kurzen Spule eine Spannung, sondern auch in der langen Spule selbst. Dieses Phänomen wird als *Selbstinduktion* bezeichnet. Analog zu Gl. (5) kann man eine Selbstinduktivität L einführen, und es gilt:

$$U_{\text{ind}} = -\mu_0 A_1 \frac{N_1^2}{\ell} \dot{I} = -L \dot{I} \quad (6)$$

Die Selbstinduktion hat eine besondere Bedeutung, wenn eine Spule mit Wechselspannung betrieben wird. Wird die Spule direkt an eine Spannungsquelle mit harmonischer Zeitabhängigkeit $U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}$ angeschlossen und ist R der ohmsche Widerstand der Spule, so ergibt sich für den die Spule durchfließenden Strom I :

$$U_0 \cdot e^{i\omega t} = L \dot{I} + R I \quad (7)$$

Setzt man in die Gleichung den Lösungsansatz $I = I_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}$ ein, so ergibt sich nach Umrechnung:

$$\frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0}{I_0} e^{i\varphi} = i\omega L + R = Z \quad (8)$$

Die komplexe Größe Z wird Impedanz genannt und stellt einen effektiven Widerstand für Wechselspannung dar. Man nennt den Term $i\omega L$ auch Blindwiderstand, weil an diesem im Gegensatz zum ohmschen Widerstand keine Leistung abfällt. Bildet man die Beträge in Gl. (8), so erhält man:¹

$$|Z| = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \sqrt{\omega^2 L^2 + R^2} \quad (9)$$

Der Effekt der *Gegeninduktion* findet beim Transformator Anwendung. Bei dem in diesem Versuch verwendeten Aufbau entspricht die lange Spule der Primär- und die kurze der Sekundärspule. Die bei der Frequenz ω in der Sekundärspule induzierte Spannung ist gegeben durch:

$$U_{\text{ind}} = -M \dot{I} = -M \frac{\dot{U}}{Z} = -M \frac{i\omega U_0 e^{i\omega t}}{i\omega L + R} \quad (10)$$

Damit ergibt sich für die Effektiv- bzw. die Maximalwerte der Primär- und Sekundärspannung:

$$\frac{U_{\text{ind,eff}}}{U_{\text{eff}}} = \frac{U_{\text{ind,0}}}{U_0} = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \quad (11)$$

Bei kleinen Frequenzen dominiert der ohmsche Widerstand die Impedanz, und die induzierte Spannung wächst proportional mit der Frequenz. Bei hinreichend großen Frequenzen dominiert dagegen der induktive Widerstand, und die induzierte Spannung steht in einem festen Verhältnis zur Primärspannung. Transformatoren arbeiten ausschließlich in dem letztgenannten Bereich.

¹ Dabei sind $U_{\text{eff}}, I_{\text{eff}}$ die Effektivwerte der Spannung und des Stromes. Der Effektivwert ist als die Wurzel des über die Zeit gemittelten Quadrates der jeweiligen Größe definiert. Er unterscheidet sich somit vom Maximalwert um einen Faktor $\sqrt{2}$ (z. B. $U_{\text{eff}} = U_0 / \sqrt{2}$).

Versuchsaufbau und -durchführung

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 1 skizziert. Er besteht aus einer langen Zylinderspule (Spule 1: $N_1 = 16000$, $\ell = 0,48$ m, $A_1 = 46,5$ cm²), die aus zwei gleichartigen Spulen zusammengesetzt ist. Auf halber Höhe der langen Spule, also gerade zwischen den Spulenhälften, ist ein schmaler Spalt offengelassen, in dem eine kurze Spule (Spule 2: $N_2 = 500$, $A_2 = 21,5$ cm²) drehbar gelagert ist. Die Drehachse ist senkrecht zur Achse der langen Spule ausgerichtet und trägt eine Skala zur Ablesung des Neigungswinkels θ der Spule 2 relativ zur Richtung von \vec{B} .

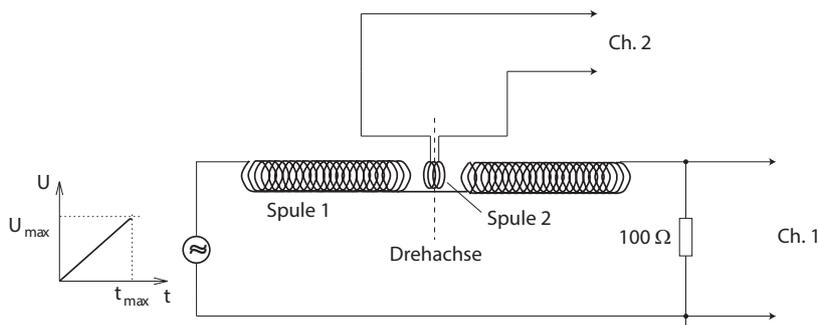


Abbildung 1: Schematischer Versuchsaufbau zur Überprüfung des Induktionsgesetzes.

Zunächst muss der ohmsche Widerstand R von Spule 1 mit einem Multimeter ermittelt werden. Dabei darf keine Spannungsquelle an der Spule angeschlossen sein. Im nächsten Schritt wird die Flussdichte des Magnetfeldes gemessen. Dazu wird eine Gleichspannung an die Spule 1 angelegt, der Spulenstrom (maximal 60 mA!) mit einem Multimeter gemessen und das Magnetfeld mit einem Teslameter ermittelt. Dies sollte für mindestens zwei verschiedene I -Werte durchgeführt werden. Beim Teslameter ist für diese Messung ausnahmsweise die Hülle abzunehmen und die Hallsonde ist sehr vorsichtig in den Spalt der langen Spule einzuführen.² Das Teslameter zeigt den exakten (Maximal-) Wert nur an, wenn das Magnetfeld den Sensor senkrecht durchdringt.

² Seien Sie bitte dabei sehr vorsichtig, da die Sonde sehr empfindlich und die Reparatur kostspielig ist!

Zur Untersuchung des Induktionsgesetzes in Gl. (4) wird an die lange Spule ein Frequenzgenerator angeschlossen, der im Dreieckssignalbetrieb eine linear ansteigende Spannung mit einer einstellbaren Wiederholfrequenz erzeugt. Dabei ist der 50 Ω -Ausgang des Frequenzgenerators zu verwenden (Warum?). Die Frequenz soll im Bereich zwischen 20 und 40 Hz gewählt werden. Bei fester Frequenz lässt sich eine konstante Zeitableitung \dot{U} und so auch ein konstantes \dot{I} bzw. $\dot{\Phi}$ erzielen. Der zeitliche Verlauf des Stroms durch die Spule $I(t)$ wird nun mit einem Oszilloskop beobachtet und gemessen. Dazu muss z. B. über einen 100 Ω -Widerstand eine zum Strom proportionale Spannung erzeugt werden. Die zeitliche Ableitung \dot{I} kann sofort ermittelt werden, da am Oszilloskop Minimal- und Maximalwert und die Zeit dazwischen abgelesen werden können. Eine Änderung der zeitlichen Ableitung kann durch Variation der Amplitude oder der Frequenz erreicht werden.

Bei Messungen mit dem Oszilloskop sollte darauf geachtet werden, dass ein geeignetes Signal zur Triggerung verwendet wird. Darüber hinaus gibt es (je nach Oszilloskop) verschiedene Möglichkeiten das Signal-Rauschverhältnis zu verbessern (Hochpass-, Tiefpassfilter, Mittelwertbildung).

Die kleine Spule (Spule 2) wird nun zunächst so ausgerichtet, dass ihre

Querschnittsfläche A_2 vom Magnetfeld der langen Spule senkrecht durchsetzt wird. Dann misst man die in der Spule 2 induzierte Spannung bei verschiedenen zeitlichen Stromableitungen \dot{I} .

Als nächstes wird bei konstantem I der Winkel θ zwischen der Normalen der Querschnittsfläche A_2 und dem Magnetfeld \vec{B} variiert. Dabei sollten genügend Messpunkte für die Induktionsspannung U_{ind} aufgenommen werden, um die $\cos \theta$ -Abhängigkeit überzeugend nachweisen zu können.

Bei Aufgabe 5 und 6 wird nun eine sinusförmige Wechselspannung benötigt. Bei verschiedenen Frequenzen soll der Betrag $|Z|$ der Impedanz bestimmt werden. Die Strom- und Spannungsmessungen können entweder mit dem Oszilloskop oder mit Multimetern durchgeführt werden. Multimeter messen Effektivwerte und arbeiten im Bereich zwischen 50 und 400 Hz relativ genau. Bei einer Messung mit dem 2-Kanaloszilloskop muss aus masstechnischen Gründen anstelle der Spulenspannung die eingeprägte Spannung gemessen werden (Fehlerabschätzung!).

Zuletzt soll im Frequenzbereich von 10-1000 Hz das Verhältnis der Sekundär- zur Primärspannung bestimmt werden. Dazu wird die kurze Spule wieder so ausgerichtet, dass ihre Querschnittsfläche A_2 vom Magnetfeld senkrecht durchsetzt wird. Bei jeder Frequenz werden mit dem Oszilloskop die Spannungen an beiden Spulen gemessen. Da das Oszilloskop eine Eigenkapazität besitzt, kann die Sekundärspannung im Frequenzbereich deutlich oberhalb von 1000 Hz nicht sinnvoll gemessen werden (Warum nicht?). Überprüfen Sie bei jeder Messung, ob die Frequenzanzeigen des Sinusgenerators und des Oszilloskops übereinstimmen.

Aufgabenstellung

1. Ermitteln Sie mit einem Multimeter den ohmschen Widerstand R der langen Spule.
2. Messen Sie bei mindestens zwei verschiedenen Spulenströmen I die Flussdichte B im Inneren der langen Spule und überprüfen Sie die Gültigkeit von Gl. (3).
3. Überprüfen Sie das Induktionsgesetz Gl. (4), indem Sie bei verschiedenen Werten für die zeitliche Stromänderung \dot{I} jeweils die in der kurzen Spule induzierte Spannung mit dem Oszilloskop (2. Kanal) messen. Die jeweilige zeitliche Stromänderung \dot{I} ist aus dem Verlauf von $I(t)$ (Oszilloskop, 1. Kanal) zu ermitteln. Rechnen Sie aus \dot{I} jeweils $\dot{\Phi}$ nach Gln. (1,3) aus und tragen Sie U_{ind} grafisch gegen $\dot{\Phi}$ oder $N_2 \dot{\Phi}$ auf. (Dreiecksbetrieb des Frequenzgenerators; Bereich 20 bis 40 Hz)
4. Messen Sie die Induktionsspannung bei verschiedenen Winkeln θ bei konstantem \dot{I} . Tragen Sie U_{ind} gegen $\cos \theta$ auf und überprüfen Sie damit die theoretisch zu erwartende Winkelabhängigkeit. (Dreiecksbetrieb des Frequenzgenerators)
5. Bestimmen Sie mit sinusförmiger Wechselspannung durch Messung von Strom und Spannung mit Oszilloskop oder Multimetern die Impedanz der langen Spule bei 50, 100, 200 und 400 Hz. Berechnen Sie für alle vier

(Maximalstrom 60 mA und Hinweise zum Teslameter beachten!)

Frequenzen aus $|Z|$ die Selbstinduktivität L nach Gl. (9). Vergleichen Sie die Werte für L .

- Bestimmen Sie mit dem Oszilloskop die Primär- und Sekundärspannung bei mindestens zehn verschiedenen Frequenzen im Bereich von 10 bis 1000 Hz. Überprüfen Sie Gl. (11), indem Sie U_{ind} gegen ω oder f auftragen und entsprechende Theoriewerte mit einzeichnen.