PHYSIKA Physikalische Praktika der Universität Bremen

23.04.2019

Kondensatorentladung (E6) VF/ZF

Ziel des Versuches

Der zeitliche Verlauf der Spannung und des Stroms bei der Entladung von Kondensatoren wird untersucht. Daraus wird die Kapazität unterschiedlicher Plattenkondensatoren bestimmt und der Einfluss verschiedener Dielektrika ermittelt. Außerdem wird die Eigenkapazität von Koaxialkabeln gemessen.

Theoretischer Hintergrund

Die Entladung und Aufladung eines Kondensators sind typische Beispiele für einen physikalischen Relaxationsvorgang, bei dem die Endwerte durch zeitlich exponentielle Annäherung erreicht werden. Zur Untersuchung dieser Vorgänge kann die in Abb. 1 dargestellte Schaltung verwendet werden. Diese Schaltung enthält drei Leitermaschen (Stichwort: kirchhoffsche Regeln). Die links dargestellte Masche enthält die Spannungsquelle U_0, einen Taster und den Kondensator C. Wird der Taster geschlossen, so lädt sich der Kondensator C bis zu einer maximalen Spannung auf. Die Kondensatorspannung kann mit Hilfe eines Elektrometerverstärkers, der auf einen Eingang des CASSY-Interface gesteckt wird, registriert werden. Der Elektrometerverstärker ist ein Impedanzwandler (Verstärkung = 1) mit einem sehr hohen Eingangswiderstand von etwa $10^{13}\,\Omega$ und wird schaltungstechnisch mittels eines Operationsverstärkers (siehe Versuch E20) realisiert. Auf Grund dieses hohen Eingangswiderstands[1] fließen in der rechten Masche praktisch keine Ströme, sodass diese in der Betrachtung außer Acht gelassen werden können. Die Eingangskapazität der Elektrometerbox und die Kabelkapazität werden im Schaltbild durch den Kondensator C_A berücksichtigt.

[1] Warum ist dieser hohe Eingangswiderstand für die Messung wichtig?

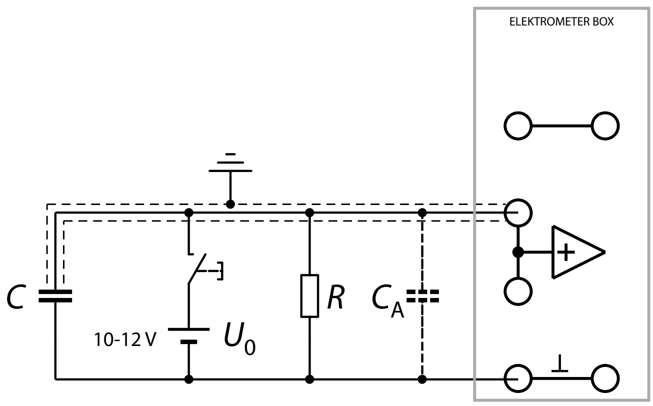


Abbildung 1: Schaltung zur Untersuchung des Entladungsvorgangs.

Zunächst soll die maximale Spannung $U_{C_{\max}}$ nach dem Aufladen berechnet werden. Nach Aufladung fließt durch den Kondensator kein Strom mehr, sodass der Strom vollständig durch R fließen muss. Für die Spannungen ergibt sich $U_R = U_{C_{\max}} = U_0$.

Wird der Taster nach abgeschlossener Aufladung geöffnet, so kann sich der Kondensator über den Widerstand R entladen. In dieser Konstellation fließen in der nun aus Kondensator C und Widerstand R bestehenden Masche Ströme, was die Berechnung der Spannungsverläufe erleichtert. Nach der kirchhoffschen Maschenregel und unter Berücksichtigung des ohmschen Gesetzes ergibt sich:

$$-U_C(t) = U_R(t) = R\,I(t) = R\,\dot{Q}_C = RC\,\dot{U}_C \quad . \tag{1}$$

Daraus folgt für $U_C(t)$ eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$U_C(t) + RC\,\dot{U}_C = 0 \quad . \tag{2}$$

Setzt man den Zeitpunkt des Beginns des Entladevorgangs $t = 0$, so erhält man die Lösung:

$$U_C(t) = U_{C_0} \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit} \quad \tau = RC \quad . \tag{3}$$

U_{C_0} ist eine Integrationskonstante. Diese entspricht der Spannung nach Aufladen des Kondensators, also gilt $U_{C_0} = U_{C_{\max}}$. Die Größe $\tau = RC$ hat die Dimension einer Zeit und wird als Zeitkonstante des RC-Glieds bezeichnet.[2] Das zeitliche Verhalten von Strom und Spannung nach Ein- und Ausschalten, z. B. eines Stroms, bis zu dem Zeitpunkt, an dem sich stationäre Verhältnisse eingestellt haben, nennt man auch Ausgleichsvorgänge.

[2] Die Zeitkonstante ergibt sich auch aus der Halbwertszeit t_H zu: $\tau = t_\mathrm{H}/0{,}69$.

Zylinderkondensator am Beispiel eines Koaxialkabels

Koaxialkabel werden in der Messtechnik häufig eingesetzt, da ihre Bauart so gestaltet ist, dass das zu übertragende Signal gegenüber äußeren elektromagnetischen Störfeldern abgeschirmt wird. Diese Kabel bestehen aus einem Innenleiter, der sogenannten Seele, und einem Außenleiter, der diese Seele in einem definiertem Abstand umschließt. Zwischen Innen- und Außenleiter befindet sich zur Isolation ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε_r. Der Außenleiter dient zur Abschirmung gegen Störfelder.

Der stromdurchflossene Innenleiter des Koaxialkabels erzeugt ein Magnetfeld, dessen Feldlinien radial um die Kabelachse orientiert sind. Einen Abschnitt eines Koaxialkabels kann wie ein Zylinderkondensator betrachtet werden, d. h., er hat eine Kapazität pro Länge, den sogenannten Kapazitätsbelag C'.

Berechnung der Kapazität pro Länge

Es wird ein Koaxialkabel (siehe Abb. 2) der Länge l betrachtet. Der Innenleiter besitzt einen Radius von r_I und eine Ladung Q.

Mit Hilfe des gaußschen Gesetzes kann die elektrische Feldstärke außerhalb des Leiters berechnet werden:

$$\oint_S \vec{E} \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \quad .$$

Das Integral wird über die Oberfläche eines Zylinders gebildet. Da das elektrische Feld senkrecht auf dem Innenleiter steht, ist im Abstand r_I (Abstand zwischen der Mantelfläche und dem Zentrum des Innenleiters) der Betrag des elektrischen Feldes $E(r)$ konstant. Daher erhält man für das Integral:

$$\oint_{\text{Mantelfläche}} \vec{E} \mathrm{d}\vec{A} = E(r) \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi \varepsilon \varepsilon_0 r l} \quad .$$

Betrachtet man nun den Außenleiter mit dem Radius r_A so besitzt dieser die Ladung $-Q$ influenziert von dem Innenleiter mit der Ladung Q. Das bedeutet, dass bei Integration über den Innen- und Außenleiter die Gesamtladung Null ist.

Betrachtet man die Potentialdifferenz zwischen Innen- und Außenleiter, so kann aus dieser Differenz die Kapazität berechnet werden:

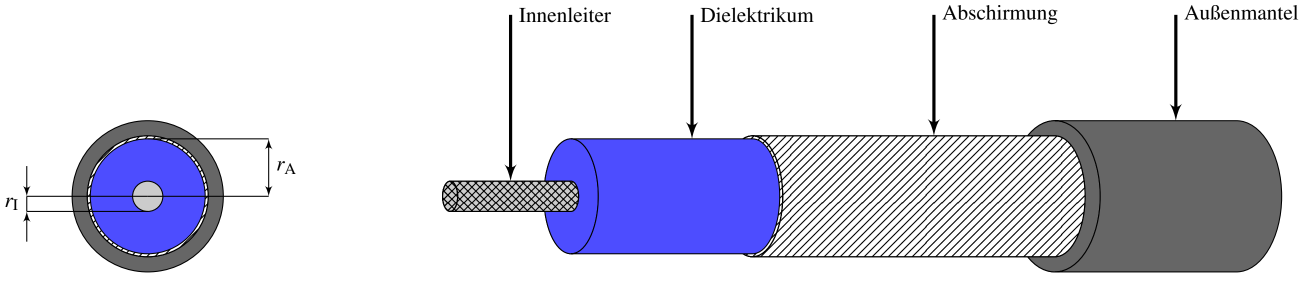
$$U = \varphi(r_\mathrm{A}) - \varphi(r_\mathrm{I}) = -\int_{r_\mathrm{I}}^{r_\mathrm{A}} \vec{E}(r) \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{Q}{2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 l} \int_{r_\mathrm{I}}^{r_\mathrm{A}} \frac{1}{r} \mathrm{d}r = -\frac{Q}{2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 l} \ln \frac{\mathrm{r_A}}{r_\mathrm{I}}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{U} = 2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{l}{\ln(\frac{r_\mathrm{A}}{r_\mathrm{I}})} \quad .$$

Die Kapazität pro Länge, bzw. der Kapazitätsbelag lautet daher:

$$C' = 2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{1}{\ln(\frac{r_\mathrm{A}}{r_\mathrm{I}})} \quad . \tag{4}$$

Abbildung 2: Aufbau eines Koaxialkabels



Versuchsaufbau und -durchführung

Der zeitliche Verlauf der Kondensatorentladungen wird mit dem CASSY-Interface und PC aufgenommen. Auf einem Eingang des CASSY-Interface ist der Elektrometerverstärker (Elektrometerbox) aufgesteckt.[3] Der Kondensator wird bei gedrückten Taster über die Spannungsquelle aufgeladen. Nach Loslassen des Tasters beginnt die Entladung, die mit CASSY aufzuzeichnen ist. Bei der Einstellung der Messparameter ist ein Triggerniveau von 6-8 V

[3] Messbereich bis 8 V

einzustellen. Dadurch beginnt CASSY mit der Messung, wenn die Kondensatorspannung auf die Triggerspannung abgefallen ist. Somit können nahezu der volle Messbereich der Elektrometerbox ausgenutzt werden als auch mögliche Störsignale, hervorgerufen durch Prellen des Tasters, unterdrückt werden.[4]

Bauen Sie die Schaltung auf und führen Sie eine Kontrollmessung des zeitlichen Abklingverhaltens der Spannung an einem konventionellen Kondensator durch. Zur Kontrolle berechnen Sie die Kapazität des Kondensators aus dem Abklingverhalten. Dazu müssen sie die Eigenkapazität des Aufbaus kennen. Um diesen Wert zu ermitteln, führen Sie eine Messung ohne Kondensator durch. So erhalten Sie die Eingangskapazität des Gesamtaufbaus bestehend aus der Elektrometerbox und der Leitungen, die Sie bei der Auswertung der Messungen mit den Plattenkondensatoren und den industriell hergestellten Kondensatoren berücksichtigen müssen. Danach können aus den gemessenen Zeitkonstanten τ unbekannte Kapazitäten bestimmt werden. Dazu werden Plattenkondensatoren unterschiedlicher Größe verwendet, bei denen zusätzlich der Plattenabstand d durch isolierende Abstandshalter eingestellt werden kann, die zwischen die beiden Platten gelegt werden. Der zeitliche Verlauf der Entladung soll bei unterschiedlichen Plattengrößen und verschiedenen Abständen d aufgenommen werden. Außerdem sollen für die Plattenkondensatoren unterschiedliche Dielektrika eingesetzt werden.

Da hierbei neben den Kapazitäten der Leitungen und der Elektrometerbox auch die Platten zur Eigenkapazität der Messanordnung beitragen, muss für jede Plattengröße die Zeitkonstante der Apparatefunktion erneut bestimmt werden. Die Messung erfolgt, indem die Kondensatorplatten mitsamt der Kabel voneinander getrennt auf den Tisch gelegt werden.

Die Kapazität eines Plattenkondensators ist nach der Theorie gegeben durch:

$$C = \varepsilon_0 \, \varepsilon_r \, \frac{F}{d} \quad . \tag{5}$$

Dabei ist F die Fläche der Kondensatorplatten, die durch Ausmessen ermittelt werden kann. ε_0 ist die Vakuum-Dielektrizitätskonstante und ε_r die Dielektrizitätskonstante des zwischen den Kondensatorplatten befindlichen Dielektrikums.[5] Gl. (5) soll durch obige Messungen verifiziert werden.

Zusätzlich messen Sie die Eigenkapazität von Koaxialkabeln unterschiedlicher Länge und vergleichen die gewonnen Werte mit den theoretisch zu berechnenden. Dann wird die Entladung mit einer RC-Kombination mit bekannten Werten für R und C gemessen, um Gl. (3) zu überprüfen und die zeitabhängige Kennlinie des Stroms und der Spannung beim Lade- und Entladevorgang von drei kommerziellen Kondensatoren gemessen.

[4] Der Pluspol ist über den Taster an die obere Kondensatorplatte anzuschließen. Verbinden Sie die Mäntel der abgeschirmten Leitungen mit der Erdungsbuchse des Spannungsversorgungsgerätes.

[5] Für Luft ist $\varepsilon_r \approx 1$

Aufgabenstellung

1. *Vorbereitende Messung:*

   (a) Bauen Sie die Schaltung mit einem kommerziellen Kondensator mit einer Kapazität von 1 nF und einem Widerstand von 4,7 MΩ auf und messen Sie das zeitliche Abklingverhalten.

(b) Messen Sie Eingangskapazität der Elektrometerbox und der Leitungskapazitäten durch eine Messung der Zeitkonstante ohne Kondensator für den verwendeten Entladewiderstände R (Apparatefunktion).

(c) Bestimmen Sie die Zeitkonstante τ für den Entladevorgang des Kondensators und überprüfen Sie mit der Beziehung $\tau = RC$ die Kapazität des verwendeten Kondensators. Dazu tragen Sie U_C halblogarithmisch gegen die Zeit t auf (Korrektur mit der Apparatefunktion nicht vergessen) oder passen Sie die korrigierte Kurve mit einer Exponentialfunktion an.

2. *Messung der Plattenkondensatoren:*

   (a) Bestimmen Sie die Kapazitäten unterschiedlich großer Plattenkondensatoren. Dazu müssen Sie zuerst für jede verwendete Plattengröße die Eigenkapazität der Messanordnung bei voneinander getrennten aber verkabelten Kondensatorplatten messen. Messen Sie U_C als Funktion der Zeit.

   (b) Ermitteln Sie $U_C(t)$ für eine Plattengröße bei fünf unterschiedlichen Plattenabständen d .

   Berechnen Sie aus den Messwerten jeweils die Kapazitäten. Somit können Sie die Gültigkeit von Gl. (5) zeigen und die Vakuum-Dielektrizitätskonstante ε_0 ermitteln.

   (c) Für eine Plattengröße F und einen Abstand d messen Sie den zeitlichen Verlauf von U_C für fünf Entladewiderstände im MΩ Bereich und überprüfen die Gültigkeit der Beziehung $\tau = RC$.

3. Bestimmen Sie die Dielektrizitätskonstanten ε_r zweier unterschiedlicher Materialien, die zwischen die Kondensatorplatten gebracht werden, indem Sie jeweils die Kapazität C ermitteln und ε_r aus Gl. (5) berechnen. Wählen Sie die Abstände zwischen den Platten und die Dicken der Materialien so, dass die Messparameter vergleichbar sind und Sie die Änderungen diskutieren können.

4. *Messung von Koaxialkabeln*

   (a) Bestimmen Sie die Kapazität von Koaxialkabeln verschiedener Länge sowie die Kapazität der Elektrometerbox mittels einer Leermessung bei einem Entladewiderstand von 2,2 MΩ. Dazu messen Sie die Entladezeiten mit und ohne Koaxialkabel. Unter Berücksichtigung der Addition der Kapazitäten bei Parallelschaltung der Bauelemente berechnen Sie die Kapazität der Koaxialkabel.

   (b) Vergleichen Sie den aus den Messwerten bestimmten Wert für den Kapazitätsbelag des Koaxialkabels mit dem, nach Gleichung 4 berechneten Wert. Dazu messen Sie den Durchmesser des Innen- und Außenleiters eines Koaxialkabels ohne BNC-Stecker mit einem Messschieber sowie die Länge des Kabels. Die Dielektrizitätskonstante ε_r des isolierenden Materials zwischen den Leitern (Polyethylen) hat einen Wert von 2,3.

5. Messen Sie die zeitabhängigen Kennlinie des Stroms und der Spannung beim Lade- und Entladevorgang von drei kommerziellen Kondensatoren deren Kapazitäten im µF Bereich liegen (Abb. 3).
   Wählen Sie den Widerstand R (für das Strom proportionale Signal) so, dass die Entladezeit τ im Bereich eine Sekunde liegt (Innenwiderstand des Cassy-Eingangs (UB) $R_\mathrm{I} = 1\,\mathrm{M\Omega}$).

6. Erklären Sie physikalisch den Verlauf der Strom- und Spannungskennlinie und berechnen Sie aus dem Abfall der Spannung beim Entladevorgang des Kondensators die Kapazität der verwendeten Kondensatoren zur Kontrolle.

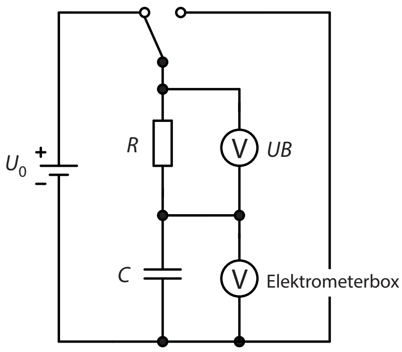


Abbildung 3: Aufbau zur U/I-Messung