

Das Frequenzverhalten von RC-Gliedern (E17)

Ziel des Versuches

Die Hintereinanderschaltung von ohmschem Widerstand und Kondensator wirkt als Filter für Signale unterschiedlicher Frequenz. In diesem Versuch sollen Sie die Eigenschaften solcher Filter untersuchen. Außerdem lernen Sie eine Schaltung kennen, die es erlaubt, zwei sinusförmige Spannungen um beliebige Phasenwinkel gegeneinander zu verschieben, ohne den Betrag der Spannungen zu ändern.

Theoretischer Hintergrund

Teil A: Filter

Die in diesem Versuch untersuchten Hochpass- und Tiefpass-Schaltungen lassen sich aus einer Grundschaltung aus Kondensator und ohmschen Widerstand (RC -Glied) ableiten. Dabei sind Kondensator und Widerstand in Reihe geschaltet und an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen (Abb. 1a). Das Verhalten dieser Schaltung, d. h. der Strom und die an R und C abfallenden Teilspannungen als Funktion der eingespeisten Wechselspannung $U(t)$, lässt sich im Prinzip durch Aufstellen und Lösen einer Differentialgleichung ermitteln. Für die häufig betrachteten sinusförmigen Ströme und Spannungen konstanter Frequenz wendet man jedoch eine vereinfachte komplexe Wechselstromrechnung an. Hierbei werden Wechselströme und -spannungen durch eine komplexe Zahl, welche die Amplitude und Phase dieser Größen beschreibt, dargestellt. Die Zeitfunktion $e^{i\omega t}$ wird weggelassen, da sie für alle Elemente der Schaltung gleich ist.

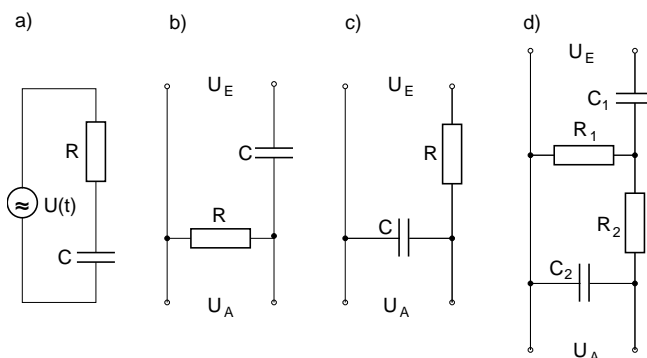


Abbildung 1: Aufbau unterschiedlicher Filterschaltungen a) Ausgangsschaltung, b) Hochpass, c) Tiefpass, d) Bandpass.

Bei der Analyse von Schaltungen treten nur Additionen auf (kirchhoffsche Regeln), die sich nun, anstelle der Summation periodischer Zeitfunktionen,

auf die Addition zeitunabhängiger komplexer Zahlen vereinfachen. Die Addition komplexer Zahlen entspricht einer Vektoraddition in der komplexen Zahlenebene. In dieser Darstellung ergibt sich somit für die Schaltung in Abb. 1a:

$$U = U_R + U_C = RI + Z_C I \quad . \quad (1)$$

Dabei gilt $U = U_0 e^{i\omega t}$, $I = I_0 e^{i(\omega t - \phi)}$ und $Z_C = 1/i\omega C$. Das negative Vorzeichen von ϕ ist eine allgemein beachtete Konvention. Für den Strom I ergibt sich:

$$I_0 e^{-i\phi} = \frac{U_0}{R - \frac{i}{\omega C}} \quad . \quad (2)$$

Hier ist, wie bereits angekündigt, der Faktor $e^{i\omega t}$ weggelassen worden. Da I_0 und U_0 reell sind, muss ϕ genau der Phase der komplexen Zahl $U_0 / (R - \frac{i}{\omega C})$ entsprechen, und I_0 ist der Betrag. Für diesen Betrag gilt:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \quad . \quad (3)$$

Für die Phase ergibt sich:

$$\tan \phi = \frac{1}{\omega RC} \quad . \quad (4)$$

Beim Hochpass (Abb. 1b) wird die Ausgangsspannung am Widerstand R abgegriffen. Mit Gl. (2) erhält man für diese Spannung:

$$U_R = RI = R I_0 e^{-i\phi} = U_{R,0} e^{-i\phi_R} \quad \text{mit} \\ U_{R,0} = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}} \quad , \quad \phi_R = \phi \quad . \quad (5)$$

Die über dem Widerstand abfallende Teilspannung ist also abhängig von der Generatorfrequenz:

Für hohe Frequenzen gilt $U_{R,0} \approx U_0$ (fast ungedämpft), für niedrige Frequenzen ist $U_{R,0} \ll U_0$. Diese Eigenschaft der Schaltung ist der Grund für die Bezeichnung *Hochpass*. Das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung eines Filters nennt man *Übertragungsfunktion*. Diese ergibt sich durch Division von $U_{R,0}$ durch U_0 .

Beim *Tiefpass* (Abb. 1c) wird die Ausgangsspannung dagegen am Kondensator abgegriffen. Für diese ergibt sich nach Gl. (2):

$$U_C = Z_C I = \frac{-\frac{i}{\omega C} U_0}{R - \frac{i}{\omega C}} = \frac{U_0}{1 + i\omega RC} = U_{C,0} e^{-i\phi_C} \quad . \quad (6)$$

Im letzten Schritt wurde U_C durch Betrag und Phase dargestellt. Für den Betrag $U_{C,0}$ ergibt sich:

$$U_{C,0} = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad . \quad (7)$$

Der Tiefpass überträgt also Gleichspannungen und Wechselspannungen niedriger Frequenzen. Signale hoher Frequenz werden gedämpft. Für die Phase beim Tiefpass gilt:

$$\tan \phi_C = -\omega RC \quad . \quad (8)$$

Die Hintereinanderschaltung von Hochpass und Tiefpass heißt *Bandpass* (siehe Abb. 1). Die Übertragungsfunktion des Bandpasses ist näherungsweise das Produkt aus den einzelnen Übertragungsfunktionen von Hoch- und Tiefpass. Die Phase berechnet sich aus der Summe $\phi_{R1} + \phi_{C2}$, wobei ϕ_{R1} , ϕ_{C2} die entsprechenden Phasenverschiebungen des einzelnen Hoch- und Tiefpasses sind.

In der Elektrotechnik wird die Verstärkung (bzw. die Abschwächung) generell in „Bel“ bzw. „Dezibel“ (dB) gemessen. Sie ist definiert als der Logarithmus des Verhältnisses von Ausgangsleistung zu Eingangsleistung:

$$V = \log\left(\frac{P_A}{P_E}\right) \cdot 1 \text{ Bel} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_A}{P_E}\right) \cdot 1 \text{ dB} \quad . \quad (9)$$

Mit $P_A = |U_A|^2/R_A$ und $P_E = |U_E|^2/R_E$ folgt für $R_A = R_E$:

$$V = 10 \text{ dB} \cdot \log\left(\frac{|U_A|}{|U_E|}\right)^2 = 20 \text{ dB} \cdot \log\left(\frac{|U_A|}{|U_E|}\right) \quad . \quad (10)$$

Als *Grenzfrequenz* definiert man die Frequenz, bei der die Ausgangsleistung auf die Hälfte der Eingangsleistung zurückgegangen ist. Für die Ausgangsspannung gilt dann $|U_A| = |U_E|/\sqrt{2}$. Für den Hochpass und den Tiefpass erhält man aus den Gl. (5,7) den gleichen Wert der Grenzfrequenz $\omega_g = 2\pi\nu_g = 1/RC$. Der Verstärkungsfaktor V und der Phasenwinkel ϕ lassen sich bequem durch ν_g ausdrücken. Für den Hochpass ergibt sich:

$$\begin{aligned} V(\nu) &= -10 \text{ dB} \cdot \log\left(1 + \left(\frac{\nu_g}{\nu}\right)^2\right) \quad \text{und} \\ \tan \phi_R &= \frac{\nu_g}{\nu} \quad . \end{aligned} \quad (11)$$

Man kann drei Fälle unterscheiden:

1. $\nu \ll \nu_g$.

Dann kann die 1 im Argument des Logarithmus in Gl. (11) vernachlässigt werden und es gilt $V(\nu) \approx 20 \text{ dB} \cdot (\log \nu - \log \nu_g)$. Das ist eine Geradengleichung für $V(\nu)$ als Funktion von $\log \nu$. Ihre Steigung beträgt 20 dB je Frequenzdekade (Frequenzverzehnfachung) bzw. etwa 6 dB je Oktave (Frequenzverdoppelung). Sie stellt eine Asymptote für den Amplitudenanstieg (Verstärkung) bei niedrigen Frequenzen dar (siehe Abb. 2).

2. $\nu = \nu_g$.

Dann ist $1 + (\nu_g/\nu)^2 = 2$ und $V(\nu_g) = -10 \text{ dB} \cdot \log 2 \approx -3 \text{ dB}$.

3. $\nu \gg \nu_g$.

Dann ist die 1 im Argument des Logarithmus in Gl. (11) dominierend und V hängt von ν praktisch nicht mehr ab. Die Übertragungsfunktion ist in diesem Bereich ≈ 1 und damit gilt $V \approx 0$.

Insgesamt ergibt sich damit das in Abb. 2 dargestellte Verhalten. Eine analoge Betrachtung kann auch für den Tiefpass angestellt werden. Es ergibt sich ein vergleichbares Ergebnis, die Verstärkungskurve muss lediglich an

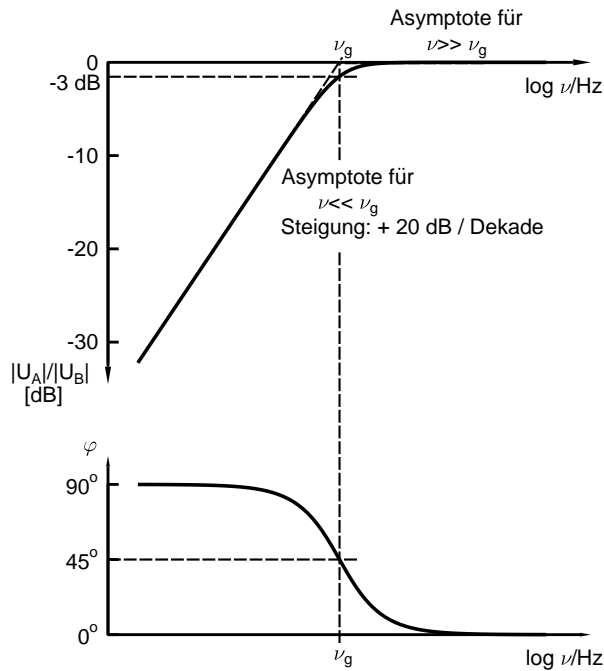


Abbildung 2: Verstärkungsfaktor und Phasenwinkel als Funktion des Logarithmus der Frequenz für einen Hochpass.

der Achse parallel zur y -Achse durch $\nu = \nu_g$ gespiegelt werden. Bei der Phasenfunktion ändert sich zusätzlich noch das Vorzeichen.

Die Eigenschaften von Hoch- und Tiefpass lassen sich auch sehr gut durch eine grafische Auftragung der Spannungen U , U_R und U_C in der komplexen Ebene untersuchen (siehe Abb. 3). Die Spannungen werden als Vektoren in der komplexen Ebene dargestellt. Die Länge der Pfeile (Zeiger) entspricht dabei dem Betrag der Spannungen, und der Winkel zur reellen Achse gibt die Phasenverschiebung zur Quellenspannung U wieder. Da die vektorielle Summe $U_R + U_C$ gleich U sein muss, bilden die drei Spannungen ein Dreieck. Beim Kondensator sind Strom und Spannung stets um $\pi/2$ gegeneinander verschoben, die Spannung am Widerstand ist jedoch in Phase mit dem Strom. Deshalb müssen U_R und U_C ebenfalls um $\pi/2$ gegeneinander verschoben sein. Das Dreieck ist also rechtwinklig und liegt auf einem Thaleskreis.

Ändert man die Frequenz ν der Quellenspannung, so ändert sich U_R in Betrag und Phase. Da aber die Vektorsumme von U_R und U_C konstant und die Phase zwischen beiden ebenfalls konstant und $\pi/2$ sein muss, kann sich U_R nur so ändern, dass die Zeigerspitze von U_R auf dem Thaleskreis entlangläuft. Bei geringer Frequenz ν ist $U_R \ll U_C$. Aus der Grafik lässt sich ersehen, dass dann $\phi_R \approx \pi/2$ und $\phi_C \approx 0$ gelten muss. Bei der Grenzfrequenz ν_g sind U_R und U_C gleich groß und die Phasenwinkel sind $\pm\pi/4$. Bei hohen Frequenzen ist $U_R \gg U_C$. Damit ergibt sich $\phi_R \approx 0$ und $\phi_C \approx -\pi/2$.

Teil B: Phasenschieber

Ein RC-Phasenschieber ist eine Schaltung (Abb. 4), die es gestattet, zwei sinusförmige Spannungen um beliebige Phasenwinkel gegeneinander zu verschieben, ohne ihre Beträge zu ändern. Der Transformator in Abb. 4 hat dabei lediglich messtechnische Bedeutung, die später erläutert wird. Nach der

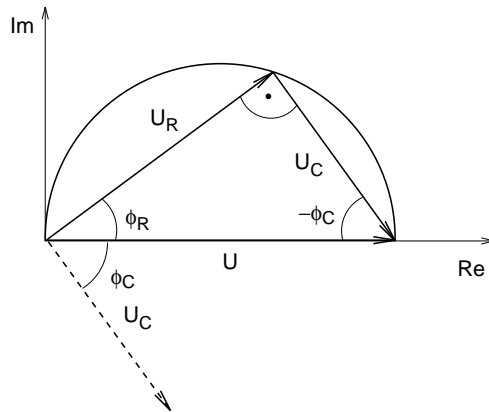


Abbildung 3: Zeigerdiagramm der im RC -Glied auftretenden Spannungen.

kirchhoffschen Maschenregel muss für die Spannungen in dieser Schaltung zu jedem Zeitpunkt

$$U(t) = U_1 + U_2 = U_R + U_C \quad \text{gelten.} \quad (12)$$

Im Zeigerdiagramm (Abb.4) bedeutet dies, dass die Spannungen U , U_R und U_C wiederum ein Dreieck bilden. Außerdem ist auch die Summe $U_1 + U_2$ gleich der Quellenspannung. Da die ohmschen Widerstände R_1 und R_2 keine Phasenverschiebung des Stroms verursachen, liegen ihre Spannungszeiger parallel zur reellen Achse (Re) und überdecken genau die Hypothense des Dreiecks.

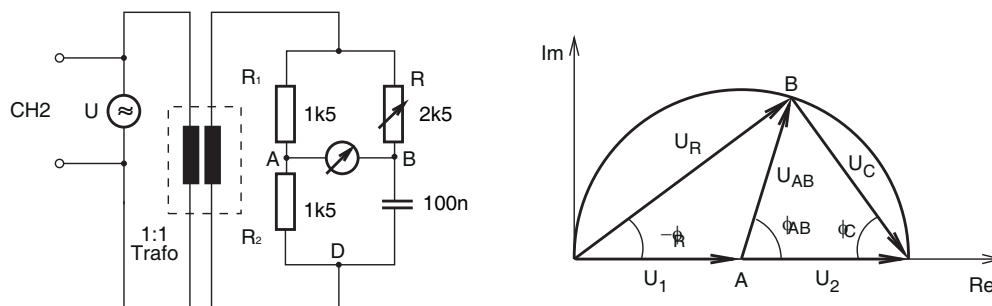


Abbildung 4: Schaltkreis des Phasenschiebers und Zeigerdiagramm der Spannungen.

Das Dreieck ist wie in Teil A rechtwinklig und liegt auf einem Thaleskreis. Gilt nun $R_1 = R_2$, so liegt der Punkt A im Zeigerdiagramm genau in der Mitte der Hypotenuse, und die Spannung U_{AB} zwischen den Punkten A und B bildet den Radius des Kreises. ändert man nun R , C oder die Frequenz ω der Quellenspannung, so ändert sich U_R in Betrag und Phase (siehe Teil A), jedoch kann sich die Zeigerspitze von U_R (Punkt B in Abb. 4) wiederum nur auf dem Thaleskreis bewegen. Das bedeutet aber, dass die Spannung U_{AB} nur ihren Phasenwinkel ϕ_{AB} zur Quellenspannung ändert, ihr Betrag bleibt konstant!

Versuchsaufbau und -durchführung

Teil A: Zunächst müssen die Schaltungen in Abb. 1 nacheinander aufgebaut werden. Die Wechselspannung U_E wird von einem Sinusgenerator geliefert, bei dem die Frequenz ν stufenlos über einen großen Frequenzbereich

einstellbar ist. Die Generatorspannung ist variabel und hat bei fester Einstellung einen konstanten (frequenzunabhängigen) Wert. Die Eingangs- und Ausgangsspannungen U_E , U_A werden mit einem Zweikanal-Oszilloskop gemessen.

U_E , U_A und die Phasenwinkel ϕ der Filter müssen nun in einem hinreichend großen Frequenzbereich gemessen werden, so dass beide linearen Bereiche des Verstärkungsfaktors V (siehe Abb. 2) erfasst werden. Dazu sollen zunächst je zwei Messpunkte pro Dekade (also z. B. für $\nu = 10$ Hz, 30 Hz, 100 Hz, 300 Hz, ...) aufgenommen werden und *begleitend zur Messung* in ein doppeltlogarithmisches Diagramm (U_A/U_E und ϕ als Funktion von ν) eingetragen werden. Danach sollten zusätzliche Messpunkte in der Nähe der Grenzfrequenzen der Filter aufgenommen werden, um das Abknicken der Kurve genauer zu lokalisieren.

Beachten Sie: Die „Minuspole“ von Sinusgenerator und Oszilloskop sind i. A. mit „Masse“ gekoppelt und liegen daher auf gleichem Potential. Zwischen diesen Anschlüssen darf sich kein Schaltungselement befinden, da sonst an diesem keine Spannung abfallen würde und es unwirksam wäre!

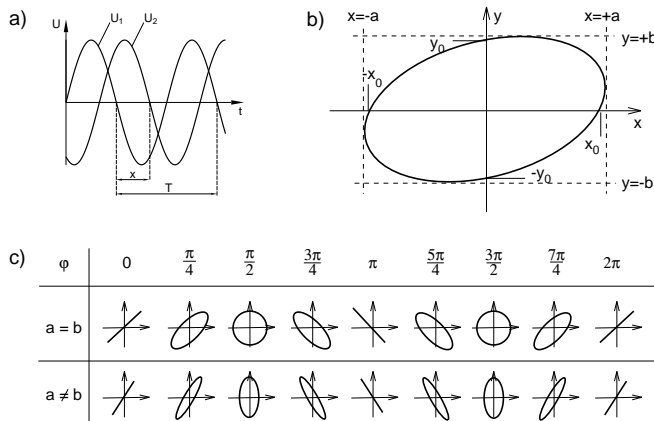


Abbildung 5: Bestimmung der Phasenverschiebung aus a) der Verschiebung der Spannungskurven, b,c) den Lissajous-Figuren.

Zur Bestimmung von Phasenverschiebungen kommen zwei Methoden in Frage:

1. Die Spannungen U_E und U_A werden im xt -Betrieb auf Kanal I und II des Oszilloskops gelegt. Die Phasenverschiebung ϕ zwischen den Schwingungen U_E und U_A ist am Oszilloskop als Ortsverschiebung ihrer Nulldurchgänge zu beobachten. Nach Abb. 5a berechnet man daraus:

$$\phi = \frac{x}{T} \cdot 2\pi \text{ (in rad)} \hat{=} \frac{x}{T} \cdot 360^\circ \quad (13)$$

2. Die Spannungen U_E und U_A werden im xy -Betrieb auf Kanal I und II des Oszilloskops gelegt. Das dabei entstehende Bild entspricht dem allgemeinen Fall einer Überlagerung zweier senkrecht zueinander stehender Schwingungen (Lissajous-Figur). Für die Schwingungsfunktionen gilt:

$$x = a \cos \omega t \quad , \quad y = b \cos(\omega t + \phi) = b (\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) \quad . \quad (14)$$

Die Bahnkurve verläuft also innerhalb eines Rechtecks mit den Seiten $x = \pm a$ und $y = \pm b$ (Abb. 5b). Aus $\cos \omega t = x/a$ folgt $\sin \omega t = \sqrt{1 - (x/a)^2}$. Einsetzen in die Gleichung für y liefert die Bahnkurve:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\frac{xy}{ab} \cos \phi - \sin^2 \phi = 0 \quad (15)$$

Die Bahnkurve ist also eine Ellipse, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Die Hauptachsen decken sich wegen des xy -Mischterms nicht mit den Koordinatenachsen. Für die Schnittpunkte x_0, y_0 mit den Koordinatenachsen (siehe Abb. 5b) erhält man aus der Ellipsengleichung

$$x_0 = a \cdot |\sin \phi|, \quad y_0 = b \cdot |\sin \phi|, \quad (16)$$

woraus sich die Phasenverschiebung ϕ berechnen lässt.

Methode 1 liefert i. A. genauere Werte für die Phasenverschiebung. Die Verschiebung x auf dem Oszilloskopschirm kann durch Skalierung der x -Achse mit dem Faktor 10 (Schalter am Oszilloskop) besonders exakt bestimmt werden. Methode 2 hat den Vorteil, dass man sich schnell einen Überblick über die ungefähre Größe von ϕ machen kann. Abb. 5c zeigt die Ellipsenformen für verschiedene Winkel ϕ . Mit Hilfe eines Vergleiches lässt sich ϕ schnell abschätzen. Dies ist besonders für den Versuchsteil B von Vorteil. Im Bereich kleiner Winkel ϕ ist die Methode auch in Bezug auf die Messgenauigkeit eine brauchbare Alternative zu Methode 1. Für $\pi/4 < \phi < \pi/2$ ist die Lissajous-Methode dagegen sehr ungenau (warum?).

Teil B: Hier muss die Schaltung in Abb. 4 aufgebaut werden. Die Quellenspannung U und die Spannung U_{AB} sind wiederum mit einem Zweikanal-Oszilloskop zu messen. Dabei ist das „Masseproblem“ zu beachten. Würde man die Generatorspannung direkt an den Phasenschieber anlegen, so würde man zwangsläufig ein Schaltungselement unwirksam machen. Um dies zu vermeiden, wird die Spannung des Sinusgenerators über einen Trafo (Übersetzungsverhältnis 1:1) auf den Phasenschieber gegeben. Dadurch wird der Massenanschluss des Sinusgenerators vom Phasenschieber abgekoppelt. Die Spannung U wird im Primärkreis des Trafos gemessen.

Legen Sie U und U_{AB} an Kanal I und II des Oszilloskops im xt -Betrieb. Überzeugen Sie sich, dass $|U|/2 = |U_{AB}| = |U_1| = |U_2|$ gilt, der Phasenwinkel ϕ_{AB} sich jedoch verschiebt, wenn R oder ν geändert werden.

Schalten Sie nun das Oszilloskop auf xy -Betrieb um, und legen Sie anstelle von U jetzt $U_2 = U_{AD}$ an den Oszilloskopeingang (Minuspole an Punkt A). Sie sollten nun eine Lissajous-Ellipse sehen, die bei Änderung von R oder ν ihre Form ändert. Skalieren Sie die Spannungsempfindlichkeit und die x - und y -Verschiebungen des Oszilloskops so, dass die Ellipse alle vier Seiten des größtmöglichen Quadrats (Maßteilung des Schirms) berührt. Nun wird am Potentiometer R der maximale Widerstand eingestellt. Stellen Sie von niedrigen Werten ausgehend die Frequenz gerade so ein, dass die Ellipse zum Kreis entartet ($\phi = \pi/2 \Rightarrow$ Grenzfrequenz des RC -Gliedes!).

Danach ist noch zu überprüfen, ob U_{AD} und U_{AB} tatsächlich bei allen Einstellungen für R und ω die gleiche Amplitude aufweisen. Dazu werden nacheinander die Frequenzen $\nu = 1 \text{ kHz}, 5 \text{ kHz}, 10 \text{ kHz}$ eingestellt. Dann

wird für jede dieser Einstellungen der Potentiometerwiderstand variiert und überprüft, ob die Ellipse stets genau innerhalb des Quadrates bleibt.

Aufgabenstellung

1. **Teil A:** Messen Sie die Übertragungsfunktion und die Phasenverschiebung als Funktion der Frequenz ν für je einen Hoch-, Tief- und Bandpass. Tragen Sie den Verstärkungsfaktor in dB und ϕ in Bogenmaß für alle drei Schaltungen gegen den Logarithmus von ν auf. Bestimmen Sie jeweils die Grenzfrequenzen, indem Sie:
 - (a) die beiden Asymptoten in der Verstärkungskurve einzeichnen und den Schnittpunkt bestimmen,
 - (b) die Stelle mit $\phi = \pm\pi/4 \hat{=} \pm 45^\circ$ ermitteln,
 - (c) die Bedingung $V(\nu_g) \approx -3$ dB ausnutzen. Berechnen Sie ν_g ebenfalls aus den technischen Daten und vergleichen Sie die Ergebnisse.
2. Bestimmen Sie aus den Verstärkungskurven bei Hoch- und Tiefpass die Steigung der „Dämpfungsgeraden“ in „dB/Dekade“ und „dB/Oktave“, und vergleichen Sie diese mit den theoretischen Werten.
3. Tragen Sie für Hoch- und Tiefpass den Tangens von ϕ doppeltlogarithmisch gegen ν auf und zeigen Sie damit die Gültigkeit der Gl. (4,8). Überlegen Sie dabei, welche Werte besonders fehlerbehaftet sind.
4. **Teil B:** Ermitteln Sie beim Phasenschieber die Grenzfrequenz ν_g , indem Sie den Punkt suchen, bei dem die Lissajous-Ellipse einen Kreis darstellt. Berechnen Sie ν_g außerdem aus den technischen Daten und vergleichen Sie die Ergebnisse.
5. Untersuchen Sie für drei Frequenzen $\nu = 1$ kHz, 5 kHz, 10 kHz die Spannungskonstanz von U_{AB} bei Variation des Potentiometerwiderstands R . Betrachten Sie dazu die Lissajous-Figur in Abhängigkeit von R . Formulieren Sie Ihre Beobachtungen. Können Sie die Abweichung (falls vorhanden) vom theoretischen Verhalten bei hohen Frequenzen erklären?