

## Der Kreisel (M11)

### Ziel des Versuches

Eines der interessantesten Objekte der klassischen Mechanik ist der Kreisel. Wird er kräftig in Rotation versetzt, kippt er nicht um, was er in Ruhe sofort täte. Lenkt man seine Achse aus, beginnt er mit der typischen Kreisbewegung. Diese Präzessionsbewegung soll näher untersucht werden.

### Theoretischer Hintergrund

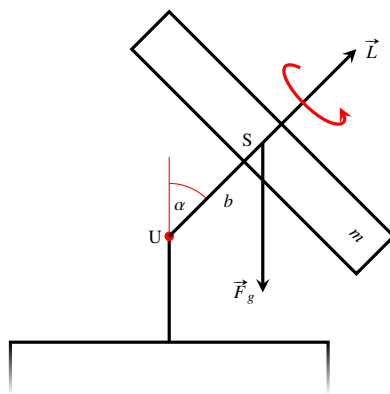


Abbildung 1: Schematischer Aufbau des Kreisels

Ein idealisierter Kreisel besteht aus einer Scheibe und einer Achse. Er soll nur am unteren Ende der Achse unterstützt werden, sonst kann er sich frei bewegen. Er rotiert um seine Achse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ . Näherungsweise gilt  $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$ . Seine Achse ist um den Winkel  $\alpha$  zur Vertikalen geneigt. Er habe die Masse  $m$  und das Trägheitsmoment  $J$ .

Sein Schwerpunkt  $S$  fällt nicht mit dem Unterstützungspunkt  $U$  zusammen. Man kann sich einen Vektor  $\vec{US}$  definieren mit dem Betrag  $b$ . Im Schwerfeld der Erde wirkt auf den Schwerpunkt die Kraft  $\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$ . Dies führt zu einem Drehmoment  $\vec{M}$ :

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{US} \quad .$$

Das Drehmoment zeigt also aus der Ebene heraus, die die Achse und die Vertikale aufspannen. Dabei ist es dem Betrag nach:

$$|\vec{M}| = m \cdot g \cdot b \cdot \sin \alpha \quad . \quad (1)$$

Durch die zum zweiten newtonschen Gesetz ( $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ ) analoge Beziehung für Drehbewegungen  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$  sieht man, dass dann auch die Änderung

des Drehimpulses, der die gleiche Richtung wie die Achse hat, stets senkrecht zur Ebene Achse-Vertikale zeigt. Die Achse bewegt sich auf einem Kegelmantel um die Vertikale mit dem Öffnungswinkel  $\alpha$ . Die Spitze des  $\vec{L}$ -Vektors umfährt die Vertikale auf einem Kreis mit dem Radius  $L \cdot \sin \alpha$ .

Für kleine Winkeländerungen  $d\varphi$  gilt dann:

$$|d\vec{L}| = |\vec{L}| \cdot \sin \alpha \cdot d\varphi = J \cdot \omega \cdot \sin \alpha \cdot d\varphi$$

$$\frac{dL}{d\varphi} = L \cdot \sin \alpha = J \cdot \omega \cdot \sin \alpha \quad .$$

Andererseits liefert Gl. (1):

$$\frac{dL}{dt} = m \cdot g \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Nun betrachtet man die Änderung des Drehimpulses  $dL$ :

$$dL = J \cdot \omega \cdot \sin \alpha \cdot d\varphi = m \cdot g \cdot b \cdot \sin \alpha \cdot dt \quad .$$

Man definiert jetzt  $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$  und bezeichnet es als Kreisfrequenz der Präzession. Sie berechnet sich nun als:

$$\Omega = \frac{m \cdot g \cdot b}{J \cdot \omega} \quad . \quad (2)$$

Man sieht sofort, dass die Präzessionsgeschwindigkeit nicht vom Neigungswinkel  $\alpha$  abhängt.

### *Versuchsaufbau und -durchführung*

Der Kreisel im Praktikum besteht aus einer Fahrradfelge, die über Speichen mit einer stabilen Achse verbunden ist. In der Achse befindet sich ein drehbar gelagertes Rohr, in dem ein Stab befestigt werden kann. Der Stab kann nun fest eingespannt werden oder mit seiner Spitze frei beweglich in die Ausbuchtung eines zweiten Stabes gesetzt werden. Zum Anreißen wird ein Band um die Achse gewickelt. Dann hält man den Kreisel oben am Rohr fest und zieht kräftig am Band, bis es abgewickelt ist. Die Kreiselachse kann dann ausgelenkt werden, sodass die Präzession beobachtet werden kann.

Zur Messung der Rotationsfrequenz wird ein Stroboskop verwendet. Die Frequenz liegt unter 5 Hz, schauen Sie deshalb auf die Speichen und drehen Sie langsam die Stroboskopfrequenz hoch. Sie sehen bei bestimmten Einstellungen stehende Bilder. Ordnen Sie diese Vielfachen der Rotationsfrequenz zu und bestimmen Sie so die Rotationsfrequenz des Kreisels.

Die Umlaufzeit der Präzession wird mit einer Stoppuhr gemessen.

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes  $J$  wird der Stab fest eingespannt. Um die Kreiselachse wird wieder ein Band gewickelt, an dem hinter einer Umlenkrolle ein Gewichtsstück (Masse  $m$ ) hängt. Das Gewichtsstück wird losgelassen und der Kreisel beginnt zu rotieren. Die potentielle Energie des Gewichtsstückes mit der Masse  $m_1$  wird in die kinetische Energie desselben und in Rotationsenergie des Kreisels umgesetzt. Für die durchfallene Strecke  $x$  stellt man die Differentialgleichung auf:

$$\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = m_1gx \quad .$$

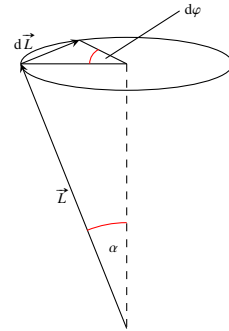


Abbildung 2: Veranschaulichung der Präzessionsbewegung

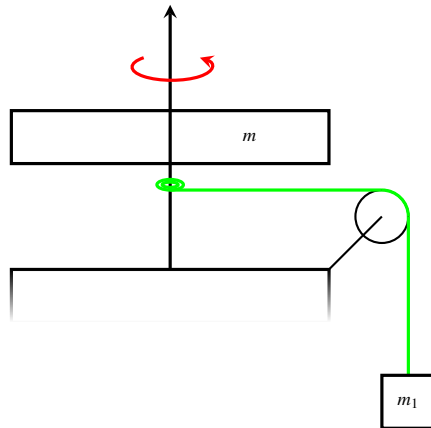


Abbildung 3: Aufbau zur Messung des Trägheitsmomentes

Mit dem *Radius*  $r$  der Achse, um die das Band gewickelt ist, kann man  $\omega$  ersetzen durch  $\frac{\dot{x}}{r}$ , und erhält:

$$\frac{1}{2} \left( m_1 + \frac{J}{r^2} \right) \cdot \dot{x}^2 = m_1 g x$$

Man differenziert einmal nach  $t$  und erhält jetzt:

$$\left( m_1 + \frac{J}{r^2} \right) \cdot \ddot{x} = m_1 g$$

Das Gewichtsstück sinkt also gleichmäßig beschleunigt zum Boden. Misst man nun die Zeit  $t$ , die es für eine Strecke  $s$  braucht, so kann man über das Weg-Zeit-Gesetz seine Beschleunigung  $\ddot{x}$  berechnen. Daraus lässt sich leicht das Trägheitsmoment ermitteln.

Durch Anbringen von Zusatzgewichten an die Felge, die in Form von Muffen vorliegen, kann das Trägheitsmoment des Kreisels erhöht werden. Diese müssen aber symmetrisch angeschraubt werden, damit der Kreisel ausgewuchtet bleibt.

### Aufgabenstellung

1. Bestimmen Sie jeweils die Trägheitsmomente des Kreisels, ohne, mit zwei und mit vier Zusatzgewichten.
2. Messen Sie für die verschiedenen Trägheitsmomente jeweils die Präzessionsdauer bei drei verschiedenen Rotationsfrequenzen.
3. Lenken Sie die Achse verschieden weit aus und zeigen Sie, dass dies keinen Einfluss auf die Kreisfrequenz der Präzession hat.<sup>1</sup>
4. Ziehen Sie den Stab verschieden weit heraus und stellen Sie so verschiedene Abstände  $\overline{US} = b$  ein. Messen Sie wieder bei drei unterschiedlichen Rotationsfrequenzen.
5. Tragen Sie in ein Diagramm die gemessene Präzessionsfrequenz gegen die aus Masse, Trägheitsmoment, Rotationsfrequenz und Abstand  $\overline{US}$  errechnete auf und zeigen Sie so die Gültigkeit der Gl. (2)

<sup>1</sup> Für die Aufgaben 3-5 ist ein Trägheitsmoment auszuwählen.