Gekoppelte Pendel (M17)

Schwingungsfähige Systeme, die sich gegenseitig beeinflussen, führen Kopplungsschwingungen aus. Ein einfaches Beispiel sind zwei in einer Ebene schwingende gleiche Pendel.

Einleitung und Hintergrund

Zwei identische Pendel sind mit einer Feder oder einem durch ein Massestück gespannten Faden gekoppelt. Dadurch ist eine Wechselwirkung und Energieübertragung zwischen beiden Pendeln möglich. Dieses System hat zwei Freiheitsgrade (zwei Ortskoordinaten zu jedem Zeitpunkt) und besitzt damit auch zwei Fundamental- oder Eigenfrequenzen. Allgemein hat ein System von n gekoppelten Oszillatoren (lineare Kette von Atomen im Festkörper) n Freiheitsgrade und ebenso viele Eigenfrequenzen.

Eine ausführliche theoretische Beschreibung der gekoppelten Pendel, die Sie sich in Vorbereitung auf den Versuch anschauen sollten, findet sich in jedem Lehr- oder Praktikumsbuch.

Kopplungsgrad

Neben dem durch die Schwerkraft bedingten rücktreibenden Drehmoment wirkt durch die Kopplung ein zusätzliches Drehmoment auf jedes Pendel. Dieses hängt von der Stärke der Kopplung ab. Im statischen Fall lässt sich der Kopplungsgrad K einfach definieren. Befindet sich Pendel A in Ruhe und wird Pendel B mit der Hand um den Winkel φ_B ausgelenkt, so wird auch Pendel A ausgelenkt um

$$\varphi_\mathrm{A} = K\varphi_\mathrm{B} \tag{1}$$

mit $0 \leq K \leq 1$. Bei einer starren Stange zwischen beiden Pendeln ist $K = 1$. Der Kopplungsgrad hängt ab von der Federkonstanten oder der Masse des Gewichts am Faden aber auch vom Anbringungsort der Feder bzw. des Fadens an den Pendelstangen (Warum?).

Gleichsinnige Schwingung

Lenkt man beide Pendel in die gleiche Richtung und um den gleichen Winkel aus und lässt sie dann los (Anfangsgeschwindigkeiten $= 0$), so schwingen sie in Phase und merken nichts von der Kopplung. Sie verhalten sich so als ob die Kopplung nicht vorhanden wäre und schwingen mit der Frequenz eines freien Pendels

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad .$$

Gegensinnige Schwingung

Lenkt man beide Pendel in entgegengesetzten Richtungen um jeweils den gleichen Winkelbetrag aus und lässt sie dann los (Anfangsgeschwindigkeiten=0), so schwingen sie beide mit der gleichen Frequenz ω_2 und mit der gleichen Amplitude, aber um 180° phasenverschoben. Beim gegenphasigen Schwingen wird die Feder abwechselnd gedehnt und gestaucht bzw. das Massestück am Faden wird angehoben und abgesenkt. Der Kopplungsmechanismus nimmt Energie auf und gibt sie anschließend wieder ab. Die Pendelfrequenz wird vom Kopplungsgrad abhängig:

$$\omega_2 = \omega_1 \sqrt{\frac{1+K}{1-K}} \quad . \tag{2}$$

Die Frequenzen ω_1 und ω_2 sind die Fundamental- oder Eigenfrequenzen des Systems. Bei beiden Schwingungsformen findet keine Energieübertragung statt.

Schwebung gekoppelter Pendel

Ein Pendel wird in der Ruhestellung festgehalten und das zweite um einen bestimmten Winkel ausgelenkt. Werden beide Pendel zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen (Anfangsgeschwindigkeiten $= 0$), so schwingen beide Pendel mit der Eigenfrequenz der gekoppelten Pendel ω_P

$$\omega_P = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \tag{3}$$

und ihre Amplitude wird mit der Frequenz

$$\omega_S = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \tag{4}$$

moduliert. Diesen Vorgang nennt man Schwebung und bezeichnet ω_S als Schwebungsfrequenz. Als Schwebungsdauer T_S definiert man die Zeit

$$T_S = \frac{\pi}{\omega_S} \quad ,$$

die zwischen zwei Nulldurchgängen eines Pendels vergeht und nicht, wie sonst üblich, die Periodendauer einer ganzen Schwingung $\left(T_P = \frac{2\pi}{\omega_P}\right)$.

Das jeweils vollständig ausgelenkte Pendel überträgt seine Energie in der Zeit $T_S/2$ vollständig auf das andere Pendel, da beide Pendel in Resonanz stehen. Da die erzwungene Schwingung im Resonanzfall gegenüber dem Erreger eine Phasenverzögerung von $\frac{\pi}{2}$ hat, beginnt, wenn Erreger und erzwungene Schwingung wechseln, das jeweilige Pendel im Schwebungsnullpunkt mit einem Phasensprung von π .

Hinweise zur Versuchsdurchführung

Im Versuch stehen Ihnen zwei (aus dem Versuch M2 bereits bekannte) Pendel mit Hallsensoren zur Verfügung. Die Hallsensoren erzeugen eine zur

Pendelauslenkung proportionale Spannung. Über die zwei Eingänge des CASSY-Interface kann der zeitliche Verlauf der Auslenkung beider Pendel aufgezeichnet werden. Da die Empfindlichkeit beider Sensoren nicht identisch ist, muss eine Kalibrierung beider Hallsensoren (z. B. Umrechnung der Spannung in m Auslenkung durch evtl. unterschiedliche Faktoren) vorgenommen werden, um die statische Bestimmung des Kopplungsgrades möglichst genau durchführen zu können.

Beide Pendel sind mit einem Faden verbunden, der durch ein Massestück gespannt wird. Sie können den Kopplungsgrad z. B. durch Verändern der Masse variieren.

Bei der Bestimmung der Schwingungsdauer T_P ist der Phasensprung beim Nulldurchgang der Amplitude zu beachten. Die für das Abzählen gewählte Schwingungsrichtung muss an dieser Stelle gewechselt werden. Für die Bestimmung von T_S nutze man mehrere, mindestens fünf Nulldurchgänge der Amplitude.

Aufgabenstellung

1. Kalibrieren Sie beide Hallsensoren, damit Sie die Auslenkung der Pendel in m aufzeichnen können.

2. Überprüfen Sie bei entferntem Kopplungsmechanismus den Gleichlauf beider Pendel über mindestens 50 Perioden.

3. Bestimmen Sie den Kopplungsgrad K der Pendel aus der statischen Auslenkung (Größtfehlerangabe) nach Gleichung (1).

4. Messen Sie die Schwingungsdauern T_1 und T_2, berechnen Sie daraus ω_1 und ω_2 und bestimmen Sie nach Gleichung (2) den Kopplungsgrad K (Größtfehlerangabe). Vergleichen Sie diesen mit dem in Aufgabe 3 erhaltenen Ergebnis.

5. Messen Sie T_P und T_S , berechnen Sie daraus ω_P und ω_S und vergleichen Sie mit den Ergebnissen nach den Gleichungen (3) und (4).

6. Führen Sie die Messungen nach Aufgabe 3 bis 5 erneut für einen anderen Kopplungsgrad durch.

Literatur

- Gerthsen Physik, 20. Auflage, Hrsg. H. Vogel, Springer-Verlag 1999, S. 181

- Physikalisches Praktikum, Dieter Geschke (Hrsg.), B.G.Teubner Verlag, 12.Aufl., 2001, S. 60 bis 63

- Bergmann-Schäfer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd.1, 8. Aufl., Verlag: Walter de Gruyter & Co. 1970, S. 198f