23.09.2022

Bestimmung von Trägheitsmomenten (M7)

Ziel des Versuches

Das Trägheitsmoment, welches abhängig von der Massenverteilung relativ zur Drehachse ist, besitzt bei einer rotierenden Bewegung eine vergleichbare Bedeutung wie die der Masse bei einer linearen Bewegung. In diesem Versuch werden die Trägheitsmomente verschiedener geometrischer Körper bei ihrer Rotation um unterschiedliche Schwerpunktachsen experimentell ermittelt. Als Messgerät wird ein sog. Drehschwinger verwendet, dessen Drehachse mit den zu untersuchenden Körpern verbunden wird. Als Messgröße wird seine Schwingungsperiode für die jeweiligen Körper bestimmt. Um den Drehschwinger jedoch als Messgerät für unbekannte Trägheitsmomente verwenden zu können, muss dieser mittels Zusatzmassen mit einem bekannten Trägheitsmoment kalibriert werden. Zusätzlich wird das Trägheitsellipsoid eines Zylinders vermessen, unter dessen Kenntnis man das Trägheitsmoment für jede beliebe Achse des Körperr, die durch den Schwerpunkt geht, bestimmen kann.

Theoretischer Hintergrund

Das *Trägheitsmoment* eines Körpers bezüglich einer Drehachse A ist definiert als

$$J_\mathrm{A} = \int r^2 \mathrm{d}m \quad , \tag{1}$$

wobei r der Abstand des Masseelementes dm von der Drehachse A ist. Da durch einen Körper unendlich viele Drehachsen gelegt werden können, ist auch die Anzahl der möglichen Trägheitsmomente unendlich. Die Bestimmung der Trägheitsmomente für alle *Schwerpunktachsen* – auch ihre Zahl ist unendlich – ist einfacher, da zwischen diesen Trägheitsmomenten J_S Beziehungen bestehen, die in Form eines Trägheitsellipsoids (Siehe Abb. 1) veranschaulicht werden können. Dieses Trägheitsellipsoid besitzt im allgemeinen drei voneinander verschiedene *Hauptträgheitsachsen*, die linear unabhängig sind und senkrecht aufeinander stehen. In einem von diesen Hauptträgheitsachsen aufgespannten x, y, z-Koordinatensytem schreibt sich das Trägheitsellipsoid mit den Hauptträgheitsmomenten $J_{\mathrm{S},x}$, $J_{\mathrm{S},y}$ und $J_{\mathrm{S},z}$ wie folgt:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{J_{\mathrm{S},x}}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{J_{\mathrm{S},y}}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{J_{\mathrm{S},z}}}\right)^2} = 1 \quad .$$

Die Halbachsen des Ellipsoids haben die Längen:

$$\sqrt{\frac{1}{J_{\mathrm{S},x}}}, \quad \sqrt{\frac{1}{J_{\mathrm{S},y}}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{1}{J_{\mathrm{S},z}}} \quad .$$

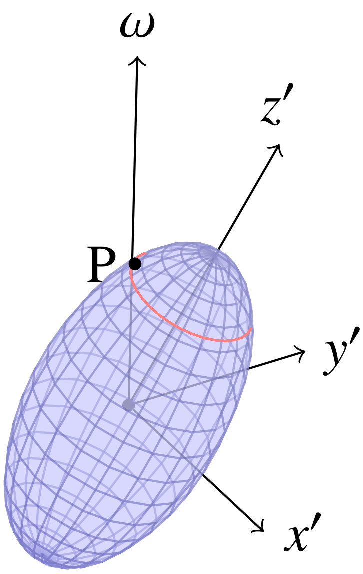

Abbildung 1: Trägheitsellipsoid für den Fall, das die Hauptträgheitsachsen des Körpers nicht mit dem Koordinatensystem (x', y', z') zusammenfallen. Der Abstand zwischen dem Schwerpunkt S und Durchstoßungspunkt der Rotationsachse durch die Ellipsoidoberfläche P ergibt das Trägheitsmoment der Körpers bezogen auf die Drehachse $\left(\overline{\mathrm{SP}} = \frac{1}{\sqrt{J_{\mathrm{A}}}}\right)$.

Die größte Hauptträgheitsachse entspricht dem kleinsten Hauptträgheitsmoment und umgekehrt. In speziellen Fällen kann das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid (zwei Hauptträgheitsmomente sind gleich) oder eine Kugel (drei Hauptträgheitsmomente sind gleich) sein. Der erste Fall tritt bei rotationssymmetrischen, homogenen Körpern und der zweite bei einer homogenen Kugel oder bei einem Würfel auf.

Fällt eine durch den Schwerpunkt gehende Drehachse mit einem der drei Hauptträgheitsmomente zusammen, so bezeichnet man diese Achse als freie Achse, da bei der Rotation dann weder Kräfte noch Drehmomente auf sie wirken. Nur in einem solchen Fall sind die Lager entlastet. Dynamisches Auswuchten, z. B. eines Rades, bedeutet daher, eine vorgegebene Rotationsachse zu einer freien Achse zu machen.

Nach dem *steinerschen Satz* ist das Trägheitsmoment J_{A} um eine beliebige Achse A, die im Abstand a parallel zu einer Schwerpunktachse mit dem Trägheitsmoment J_{S} verläuft, durch

$$J_{\mathrm{A}} = J_{\mathrm{S}} + ma^2 \tag{2}$$

gegeben, wobei m die Gesamtmasse des Körpers ist.

Für symmetrische Körper lässt sich das Integral (1), welches das Trägheitsmoment definiert, meist elementar lösen. Bei Anwendung von Tabellen für Trägheitsmomente beachte man stets die zu einer Formel gehörige Drehachse. Für einen Zylinder der Masse m, der Höhe h und dem Radius R_{Z} erhält man zum Beispiel für die zwei in Abb. 2 dargestellten Drehachsen folgende

Trägheitsmomente: $J = \frac{1}{2}mR_Z^2$ (Drehung um Rotationssymmetrieachse) und $J = \frac{1}{4}mR_Z^2 + \frac{1}{12}mh^2$ (Drehung um eine zur Rotationsachse senkrecht stehende Schwerpunktsachse). Diese Trägheitsmomente sind die beiden Hauptträgheitsmomente des Zylinders.

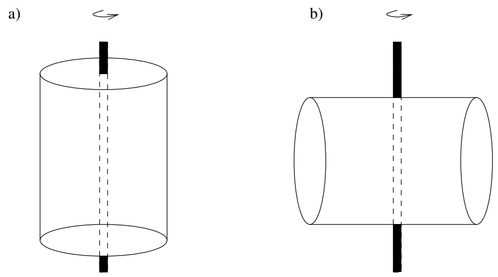

Abbildung 2: Hauptträgheitsachsen eines Zylinders

Experimentell erfolgt die Bestimmung von Trägheitsmomenten mit einem *Drehschwinger* (Drehtisch) (Abb. 3). Der Drehtisch ist um eine senkrechte Achse A drehbar und kehrt nach Auslenkung mit der Hand infolge der elastischen Deformation der Spiralfeder SP in einer schwach gedämpften Schwingung in seine Ruhelage zurück. Die Schwingungsdauer T der Drehschwingung ist gegeben durch

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\text{Tisch}}}{D}} \quad , \tag{3}$$

wobei J_{Tisch} das Trägheitsmoment des Drehtisches und D das Richtmoment der Feder ist.

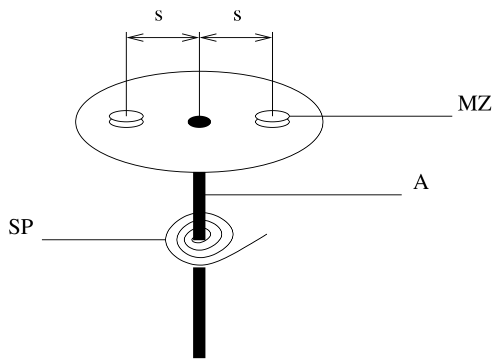

Abbildung 3: Drehtischanordnung

Versuchsdurchführung

Zuerst wird der Drehtisch mit bekannten Trägheitsmomenten kalibriert. Dazu werden Messingzylinder MZ so auf den Drehtisch gestellt, dass ihre Rotationssymmetrieachsen parallel zur Drehachse des Drehtisches verlaufen. Die Messingzylinder sind dazu mit dem Nippel in die Löcher der Scheibe zu stecken. Damit keine Unwucht entsteht, sollten die Messingzylinder paarweise (2 bzw. 4 Stück) verwendet und symmetrisch zur Drehachse des Drehtisches angeordnet werden. Das Trägheitsmoment der Anordnung ergibt sich dann nach (3) zu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(J_{\mathrm{Tisch}} + J_{\mathrm{Z}})}{D}} \quad , \tag{4}$$

wobei J_{Tisch} das unbekannte Trägheitsmoment des Tisches und J_{Z} das insgesamt aufgesetzte Zusatzträgheitsmoment der Messingzylinder ist. Mit dem bekannten Trägheitsmoment für einen Zylinder, der um seine Rotationssymmetrieachse rotiert (Abb. 2), und nach dem steinerschen Satz (2) lässt sich das Zusatzträgheitsmoment J_{Z} (z. B. für zwei symmetrisch angeordnete Messingzylinder) berechnen:

$$J_{\mathrm{Z}} = 2\,(\frac{1}{2} m R_{\mathrm{Z}}^2 + m s^2) \quad . \tag{5}$$

Hier ist s der Abstand zwischen der Drehtischachse und der Rotationssymmetrieachse der Messingzylinder und m bzw. R_{Z} sind Masse bzw. Radius der Messingzylinder. Für vier symmetrisch angeordnete Zylinder (Abstände s_1 bzw. s_2) erhält man dementsprechend:

$$J_{\mathrm{Z}} = 2\,(\frac{1}{2} m R_{\mathrm{Z}}^2 + m s_1^2) + 2\,(\frac{1}{2} m R_{\mathrm{Z}}^2 + m s_2^2) \quad .$$

Quadriert man (4) erhält man:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} J_{\mathrm{Z}} + \frac{4\pi^2}{D} J_{\mathrm{Tisch}} \quad . \tag{6}$$

In der Auftragung T^2 über J_{Z} erhält man eine Gerade mit dem Anstieg $(4\pi^2/D)$ als Kalibrierungskurve für den Drehtisch. Diese Gerade schneidet die J_{Z}-Achse bei $J_{\mathrm{Z}} = -J_{\mathrm{Tisch}}$.

Nur für VF/ZF Studierende:

Hinweis für Aufgaben 6 und 7: Würde man die in Aufgabe 6 erhaltenen Werte in Polarkoordinaten (ρ, α) mit $\rho = 1/\sqrt{J_{\mathrm{S}}}$ auftragen, erwartet man eine (Viertel-)Ellipse. Um aber tatsächlich zu überprüfen, ob die ermittelten Trägheitsmomente die Ellipsengleichung erfüllen, wählt man eine linearisierte Darstellung. Setzt man Polarkoordinaten

$$x = \rho\cos\alpha \quad \text{und} \quad y = \rho\sin\alpha$$

in die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ein, so erhält man

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}\,\sin^2\alpha + \frac{1}{a^2} \quad ,$$

wobei $1/\rho^2 = J_{\mathrm{S}}$ ist. Damit liefert die Darstellung $J_{\mathrm{S}}(\alpha) = f(\sin^2\alpha)$ eine Gerade, wenn die Ellipsengleichung durch die Messwerte erfüllt wird.

Das Trägheitsmoment der Halterung des Zylinders beträgt $(0{,}01 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kgm}^2$.

Aufgaben

1. Messung der Schwingungsdauer des Drehtisches für verschiedene Abstände paarweise (zwei und vier) angeordneter Messingzylinder zur Drehachse (wegen der Genauigkeit: Messung von jeweils 5 bis 10 T)

2. Grafische Darstellung T^2 über J_Z als Kalibrierungskurve des Drehtisches mit Messunsicherheiten. Die Kalibrierungskurve ist während des Versuches zu zeichnen und Bestandteil des Messprotokolls!

3. Bestimmung des Trägheitsmomentes des Tisches J_{Tisch} aus dem Achsenschnittpunkt und des Richtmoments D der Feder aus dem Anstieg der Kalibrierungskurve (Angabe der maximalen Messunsicherheit).

4. Experimentelle Bestimmung der Trägheitsmomente entlang der Rotationssymmetrieachse zweier Körper ihrer Wahl und Vergleich mit den theoretisch bestimmten Werten.

Nur für VF/ZF:

5. Experimentelle Bestimmung der drei Hauptträgheitsmomente eines Quaders über Schwingungsdauermessung und Kalibrierungskurve mit Abschätzung der maximalen Messunsicherheit.

6. Messung der Trägheitsmomente $J_S(\alpha)$ eines Zylinders in Abhängigkeit vom Neigungswinkel α zwischen der Zylinderrotationssymmetrieachse und der Drehachse des Drehtisches. (Messung zwischen $0 \leq \alpha \leq 90°$ in Schritten von 15°; Messung von jeweils mehreren Perioden).

7. Die in Aufgabe 6 ermittelten Trägheitsmomente $J_S(\alpha)$ sind linearisiert in der Form $J_S(\alpha)$ über $\sin^2\alpha$ darzustellen.