PHYSIKA Physikalische Praktika der Universität Bremen

Drehimpulserhaltung (M12)

Ziel des Versuches

Die Drehimpulserhaltung soll experimentell beim inelastischen Stoß zweier Körper überprüft werden. Dazu wird der Stoß einer sich geradlinig und gleichförmig bewegenden Kugel mit einem drehbar gelagerten Körper untersucht. Die Geschwindigkeit der Kugel wird vor dem Stoß mit einer Lichtschranke und die Winkelgeschwindigkeit des drehbar gelagerten Körpers nach dem Stoß mit einem Winkelsensor gemessen.

Theoretischer Hintergrund

Der Drehimpuls ist eine wichtige Erhaltungsgröße in der Mechanik. Die Drehimpulserhaltung spielt z. B. beim Radfahren, bei der Pirouette beim Eiskunstlauf, beim Salto, bei der Planetenbewegung und in der Atomphysik (Elektronenbahn und Elektronenspin) eine wichtige Rolle.[1]

[1] Der Drehimpuls bleibt in einem abgeschlossenen System erhalten, d. h., er ändert sich zeitlich nicht. Es gilt $\vec{L} = \text{const}$, wenn kein äußeres Drehmoment wirkt: $\vec{M} = \mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t = 0$. Das Drehmoment verschwindet wegen $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ bei $\vec{F} = 0$ oder bei $\vec{F} \parallel \vec{r}$ (Zentralfeld).

Bewegt sich ein Körper mit der Masse m in einer Ebene, so ist sein Ort zur Zeit t durch den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ bestimmt. Seine Geschwindigkeit ist $\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}$ und der Bahndrehimpuls bezüglich des Koordinatenursprungs O ist definiert als

$$\vec{L} = m\vec{r}(t) \times \vec{v}(t) \quad . \tag{1}$$

Dabei ist $\vec{L}$ ein Vektor, der sowohl senkrecht auf dem Vektor $\vec{r}(t)$ als auch senkrecht auf dem Vektor $\vec{v}(t)$, also hier senkrecht zur Bahnebene, steht und dessen Länge oder Betrag $L = \left|\vec{L}\right|$ durch

$$L = m\,|\vec{r}(t)|\,|\vec{v}(t)|\sin\alpha \tag{2}$$

gegeben ist.

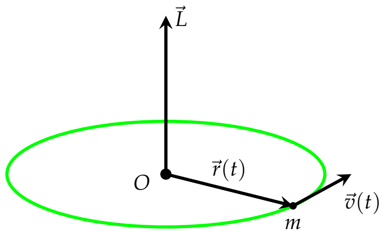

Abbildung 1: Drehimpuls

Dabei ist α der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{r}(t)$ und $\vec{v}(t)$. Für eine Kreisbewegung des Körpers mit der Masse m , bei der eine Kraft auf den Körper wirken muss (Zentralfeld), ist dies sofort einsichtig (siehe Abb. 1).

Wirkt keine Kraft auf den Körper, so ist er in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf einer Geraden. Ein sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf einer Geraden bewegender Körper mit der Masse m besitzt auch einen Drehimpuls $\vec{L}$ bezüglich des Punktes O (siehe Abb. 2).[2]

[2] Eine geradlinig gleichförmige Bewegung besitzt einen konstanten Drehimpuls, der vom Bezugssystem abhängt. Der Drehimpuls ist also keine reine Teilcheneigenschaft, er verschwindet nur, wenn der Punkt O auf der Geraden (Bahn) liegt.

In diesem Spezialfall ist der Betrag des Drehimpulses $L = \left|\vec{L}\right|$ eine Erhaltungsgröße, das heißt L ändert sich zeitlich nicht. Entsprechend Gl. (2) gilt dann

$$L = m\,|\vec{r}(t)|\,v \sin\alpha = mvd = \text{const} \quad , \tag{3}$$

wobei $d = |\vec{r}(t)| \sin\alpha$ der Abstand der Geraden vom Punkt O ist (siehe Abb. 2).

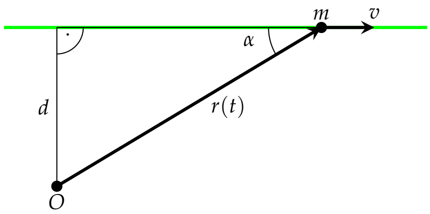

Abbildung 2: Drehimpuls einer geradlinig gleichförmige Bewegung

Zusätzlich wird nun ein ausgedehnter, starrer Körper betrachtet, der um eine Achse, die durch den Punkt O geht, fast reibungsfrei rotieren kann. Wirkt auf ihn keine äußere Kraft, so ruht er oder dreht sich mit in Betrag und Richtung konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Sein Drehimpuls bezüglich des Punktes O ist definiert als

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \tag{4}$$

und bleibt in diesem Fall in Betrag und Richtung erhalten. Die Größe J ist das Trägheitsmoment[3] des Körpers bezüglich seiner Drehachse durch den Punkt O.

Wechselwirken zwei Körper in einem abgeschlossenen System miteinander, so bleiben neben der Gesamtenergie[4] und dem Gesamtimpuls auch der Gesamtdrehimpuls des Systems erhalten. Haben zwei Körper vor dem Stoß bezüglich eines gemeinsamen Koordinatenursprungs O die Drehimpulse $\vec{L}_{1\mathrm{v}}$ und $\vec{L}_{2\mathrm{v}}$ und nach dem Stoß $\vec{L}_{1\mathrm{n}}$ und $\vec{L}_{2\mathrm{n}}$, so gilt

$$\vec{L}_{1\mathrm{v}} + \vec{L}_{2\mathrm{v}} = \vec{L}_{1\mathrm{n}} + \vec{L}_{2\mathrm{n}} = \text{const} \quad . \tag{5}$$

Beim inelastischen Stoß gilt entsprechend

$$\vec{L}_{1\mathrm{v}} + \vec{L}_{2\mathrm{v}} = \vec{L}_{\mathrm{n}} = \text{const} \quad , \tag{6}$$

wobei $\vec{L}_{\mathrm{n}}$ der gemeinsame Drehimpuls beider Körper nach dem Stoß ist.

[3] Bei der Translationsbewegung ist die Masse eines Körpers eine wichtige Größe. Bei der Rotationsbewegung ist neben der Masse vor allem auch der Abstand der Masse zur Drehachse entscheidend. Das Analogon zur Masse bei der Translationsbewegung ist das Trägheitsmoment bei der Rotationsbewegung. Es ist quasi die „Drehmasse“ eines Körpers und abhängig von der Lage der Rotationsachse. Siehe Versuch M7.

[4] Bei einem inelastischen Stoß geht ein Teil der kinetischen Energie in innere Energie (Verformung, Wärme) über.

Versuchsdurchführung

Der Versuchsaufbau besteht aus einem im Punkt O drehbar gelagerten Arm mit drei Kugelfängerboxen. Die Größe d_i ($d_1 = (140 \pm 2)$ mm, $d_2 = (270 \pm 2)$ mm, $d_3 = (400 \pm 2)$ mm) ist, wie in Abb. 3 gezeigt, der Abstand der jeweiligen Kugelfängerbox vom Drehpunkt O. Das Trägheitsmoment des Arms beträgt $J_\mathrm{A} = (0{,}065 \pm 0{,}005)\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$, wenn alle Kugelfängerboxen mit je einer Kugel besetzt sind. Bei der Durchführung der Versuche ist jeweils eine Kugel zu entfernen. Im Experiment stößt diese Kugel (Masse m, Geschwindigkeit v) inelastisch mit dem Arm zusammen, das heißt, sie wird beim Stoß von der leeren Kugelfängerbox aufgenommen und rotiert dann gemeinsam mit dem durch den Stoß in Rotation versetzten Arm. Die Kugel rollt vor dem Stoß eine Rampe herunter, um eine Geschwindigkeit v zu erhalten. Die Rampe ist an ihrem unteren Ende so geneigt, dass sich die

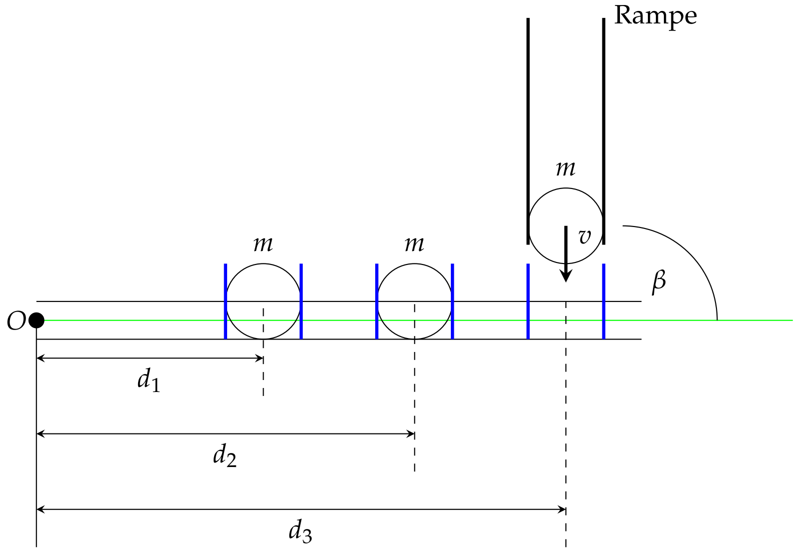

Abbildung 3: Versuchsanordnung: drehbarer Arm mit Kugelfängern und Rampe

Kugel und die Schale kurz vor dem Stoß horizontal in einer Ebene befinden.[5]

Die Rampe ist so auszurichten, dass die Kugel zentral in die entsprechende Kugelfängerbox rollt.

Um jedesmal die gleiche Geschwindigkeit v der stoßenden Kugel zu erhalten, muss diese immer von der gleichen Höhe auf der Rampe gestartet werden. Die Geschwindigkeit v der Kugel ist mit der Lichtschranke zu messen.[6] Der Bahndrehimpuls der Kugel bezogen auf den Punkt O (Drehpunkt des Arms) ist gemäß Gl. (3) dann

$$\vec{L}_{1\mathrm{v}} = m d_i \vec{v} \quad .$$

Wenn sich der Arm mit den drei Kugeln vor dem Stoß in Ruhe befindet, also sein Anfangsdrehimpuls verschwindet, kann damit in Gl. (6) $\vec{L}_{2\mathrm{v}} = 0$ gesetzt werden.

Nach dem Stoß hat das System, bestehend aus Arm und drei Kugeln, den Drehimpuls $\vec{L}_\mathrm{n} = J_\mathrm{A}\omega$. Gemäß Gl. (6) gilt damit

$$m d_i v = J_\mathrm{A}\omega \tag{7}$$

bzw. wenn die Rampe um den Winkel β gedreht wird

$$m d_i v \sin\beta = J_\mathrm{A}\omega \quad . \tag{8}$$

Da die Größen J_A, m, v im Versuch konstant sind bzw. gehalten werden, kann man auch schreiben

$$\mathrm{const}\cdot\omega = d_i \sin\beta \quad . \tag{9}$$

Für die Versuchsdurchführung wählen Sie sich eine geeignete Starthöhe[7] und messen Sie mit Hilfe der Lichtschranke die Geschwindigkeit der Kugel. Nutzen Sie dazu die Funktion „Dunkelzeit“ des CASSY-Systems. Justieren Sie die Lichtschranke so, dass der gesamte Kugeldurchmesser zur Verdunklung beiträgt.

Der Drehwinkel über der Zeit des Systems „Arm mit drei Kugeln“ nach dem Stoß wird mit Hilfe eines Drehwinkelsensors gemessen

[5] Dadurch finden wir eine Kugel vor, die sich kurz vor dem Stoß geradlinig und gleichförmig mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt.

[6] Eine Berechnung von v allein aus der Höhe der Rampe ist schwierig, da durch das Rollen der Kugel Rotationsenergie aufgebracht werden muss und zusätzlich Reibungseffekte eine Rolle spielen.

[7] Nutzen Sie dafür die in die Rampe gefrästen Markierungen.

und ebenfalls mit Hilfe des CASSY-Interface-Systems aufgezeichnet. Aus dem Anstieg dieser Kurve können Sie die Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoß ermitteln.

Aufgabenstellung

1. Justieren Sie mit Hilfe der in der Grundplatte befindlichen Einstellschrauben den Dreharm mit den drei Kugeln so, dass sich der Arm bei jedem Winkel der Auslenkung in Ruhe befindet.

2. Wählen Sie eine geeignete Starthöhe aus und bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Kugel mit der Lichtschranke durch mehrfach wiederholte Messungen.

3. Bestimmen Sie für verschiedene Kugelfängerabstände d_i bei konstanter Kugelgeschwindigkeit v und $\beta = 90°$ jeweils die Winkelgeschwindigkeiten ω.[8] Messen Sie dazu für jedes d_i die Winkelgeschwindigkeiten ω mehrmals und überprüfen Sie die Gültigkeit der Gl. (9), indem Sie die Mittelwerte $\overline{\omega}$ für jedes d_i in ein Diagramm eintragen. Fertigen Sie dieses Diagramm bereits während des Versuches im Praktikum an.[9]

4. Bestimmen Sie beim größten Kugelfängerabstand d_3 bei konstanter Kugelgeschwindigkeit v die Winkelgeschwindigkeiten ω in Abhängigkeit vom Winkel β. Messen Sie die Winkelgeschwindigkeiten ω für jeden Winkel β mehrmals und bilden Sie die entsprechenden Mittelwerte $\overline{\omega}$. Stellen Sie $\overline{\omega}$ in Abhängigkeit von $d_3 \sin \beta$ grafisch dar und bestätigen Sie die Gl. (9).

5. Bestimmen Sie aus Ihren Messergebnissen gemäß Gl. (7) die Masse der Kugel und überprüfen Sie das Ergebnis durch eine Wägung.

[8] Beachten Sie bitte, dass die Angabe der Winkelgeschwindigkeit im Bogenmaß pro Sekunde erfolgt.

[9] Drucken Sie nur *eine* beispielhafte Grafik für Ihren Bericht aus.