22.05.2023

Fadenpendel (M1)

Ziel des Versuches

Dieser Versuch ist ein grundlegender Versuch der Mechanik. Der einfache Aufbau, bei dem eine Kugel an einem Faden hängt, ermöglicht einen ersten Einblick in die wichtigen Begriffe Energieerhaltung und Schwingung mittels der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Fadenlänge und Schwingungsdauer. Da die Versuchsdurchführung nicht aufwendig ist, wird hier die statistische Analyse der Messdaten, sowie der Umgang mit Messunsicherheiten geübt, um die zu berechnende Fallbeschleunigung mit ihrer Messunsicherheit möglichst genau angeben zu können.

Theoretischer Hintergrund

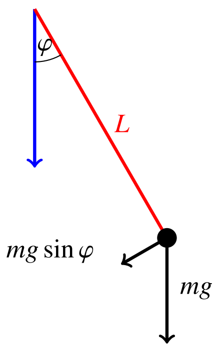

Abbildung 1: Schema zur Verdeutlichung von Formel (1)

Ein Fadenpendel besteht aus einer Kugel mit der Masse m, die an einem Faden hängt, der an einem festen Punkt angebracht ist. Lenkt man die Kugel von ihrer Ruhestellung um den Winkel φ aus, so wirkt eine Rückstellkraft F, die von der Masse der Kugel, der Erdbeschleunigung g und dem Auslenkwinkel abhängt.

$$F = -mg\sin\varphi \quad . \tag{1}$$

Wenn das Pendel schwingt, ist diese Kraft F proportional zur Masse und Beschleunigung a der Kugel.

$$F = m \cdot a \quad .$$

Die Kugel beschreibt einen Bogen um den Aufhängepunkt. Für ein kleines Bogenstück $\Delta x = L\Delta\varphi$, das proportional zur Fadenlänge ist, braucht die

Kugel die Zeit Δt und hat die Geschwindigkeit $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Leitet man die Geschwindigkeit v nach der Zeit t ab, erhält man die Beschleunigung. Fasst man alle Beziehungen zusammen, ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$-mg\sin\varphi = F = ma = mL\ddot{\varphi} \quad .$$

Für kleine Winkel kann man $\sin\varphi$ durch φ ersetzen. Man bezeichnet dann das Pendel als mathematisches Pendel und erhält:

$$-g\varphi = L\ddot{\varphi} \quad .$$

Wenn man zur Zeit $t = 0$ die Kugel loslässt und sie bis zum Winkel φ_0 ausgelenkt hat, ist die Lösung dieser Differentialgleichung:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t) \quad .$$

Das Pendel braucht also für eine Periode 2π die Zeit T:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \quad . \tag{2}$$

Für kleine Auslenkwinkel $\varphi < 5^o$ und T etwa 2 s ist der Unterschied zwischen der exakten Lösung und der Näherung kleiner als 0,001 s. Da die gesamte Pendellänge nur sehr ungenau auszumessen ist, bedienen wir uns bei der Bestimmung der Erdbeschleunigung eines Tricks und nehmen eine feste Länge L_0 an und variieren die Pendellänge nur um kleine, genau einstellbare Beträge L_i. Damit wird aus (2):

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L_0 + L_i}{g}} \quad . \tag{3}$$

Versuchsaufbau und -durchführung

Eine Kugel hängt an einem dünnen Faden, dessen Länge durch einen Schieber und entsprechende Marken in Schritten von 2 cm definiert verändert werden kann. Das Pendel führt beim Auslenken Schwingungen aus, deren Periodendauer mit einer von Hand ausgelösten Stoppuhr bestimmt wird. Die Schwingungsdauer lässt sich genauer bestimmen, wenn man nicht die Zeit einer Periode misst, sondern mehrere, beispielsweise 10. Wiederholt man diese Messung beliebig oft, so wird die berechnete Unsicherheit der Zeitmessung beliebig klein. Da aber auch die Bestimmung der Fadenlänge in der Genauigkeit beschränkt ist, lohnt es nicht, die Zeitmessung zu exakt zu betreiben. Man sollte etwa $\Delta L/L \approx 0{,}2\Delta T/T$ erreichen.

Für die Aufgaben 1 und 2 wähle man die gleiche Anfangslänge L_0, die man nicht ausmessen braucht. Man stelle dazu den Schieber exakt auf eine der eingefrästen Ringmarken. Für die Aufgabe 3 wird die gewählte Fadenlänge L_0 mit dem Schieber immer um exakt 4 cm, also um die Werte $L_i(i = 1, \ldots, 10)$, verändert und die Schwingungsdauer gemessen. Quadrieren der Gleichung (3) liefert:

$$T_i^2 = \frac{4\pi^2}{g} L_i + \frac{4\pi^2}{g} L_0 \quad . \tag{4}$$

Für Aufgabe 4 fertige man eine grafische Darstellung $T_i^2 = f(L_i)$ an und bestimme aus dem Anstieg $m = (T_i^2 - T_j^2)/(L_i - L_j) = 4\pi^2/g$ die Fallbeschleunigung g sowie aus dem Schnittpunkt mit der $L-$Achse die Anfangslänge L_0. Tragen Sie unbedingt in das Diagramm die entsprechenden Unsicherheiten ein, um die Unsicherheit Δm des Anstiegs und daraus die Unsicherheit Δg der Fallbeschleunigung zu ermitteln.

Der Trick besteht somit darin, die Erdbeschleunigung recht genau ermitteln zu können, ohne die nur sehr ungenau bestimmbare Pendellänge L_0 zu messen.

Aufgabenstellung

1. Bereiten Sie bereits zu Hause Ihr Messprotokoll vor und überlegen Sie sich, wie Sie die gemessenen Daten möglichst effektiv bearbeiten können (Machen Sie sich mit den Statistikfunktionen Ihres Taschenrechners/Ihres Auswerteprogramms vertraut).

2. Stellen Sie eine feste Pendellänge L_0 ein. Messen Sie dann für n Perioden die Schwingungsdauer $n \cdot T$. Die Zahl n sollte möglichst groß (mindestens 10) sein, wird aber durch die Abnahme der Schwingungsamplitude begrenzt. Wiederholen Sie die Zeitmessung 25 mal.

   (a) Führen Sie diese Messung sowohl beim Nulldurchgang des Pendels als auch am Umkehrpunkt des Pendels durch.

   (b) Berechnen Sie jeweils Mittelwert, Standardabweichung und Vertrauensbereich der Schwingungsdauer und diskutieren Sie die Ergebnisse.

   (c) Zeichnen Sie Histogramme, die die Streuung der Schwingungsdauern illustrieren. Wählen Sie die Intervalle so, dass die Streuung über 5 bis 10 Kästchen geht.

3. Messen Sie beim Nulldurchgang des Pendels (gewählte Länge L_0) 25 mal die Periodendauer für nur eine Schwingung.
   Berechnen Sie die Standardabweichung und vergleichen Sie diesen Wert mit den aus Aufgabe 1 erhaltenen.

4. Messen Sie die Schwingungsdauer für 10 verschiedene Fadenlängen (Messung mit $n = 10$ und beim Nulldurchgang). Starten Sie mit der Pendellänge L_0 und verändern Sie dann die Länge um 4 cm durch das Verschieben des Schiebers bis zur jeweils übernächsten Marke.

5. Bestimmen Sie die Fallbeschleunigung g und die Anfangslänge L_0 mittels grafischem Geradenausgleich *auf Millimeterpapier* unter Verwendung Ihrer Messdaten aus Aufgabe 4. Berechnen Sie dazu die Quadrate der Schwingungsdauer und die entsprechende Messunsicherheit. Ist ΔT die Messunsicherheit der Schwingungsdauer T, dann ist nach den Regeln der Berechnung der kombinierten Messunsicherheit $2T \cdot \Delta T$ die Messunsicherheit von T^2. Tragen Sie die Messunsicherheit in die grafische Darstellung $T_i^2 = f(L_i)$ ein, um die Unsicherheit des Anstiegs und daraus den der Fallbeschleunigung zu ermitteln.

Die Berechnungen der Standardabweichungen und Vertrauensbereiche (Aufgaben 2a, 2b, 3) sowie die Anfertigung der grafischen Darstellung (Aufgabe 5) sollen bereits während des Versuches auf Millimeterpapier erfolgen und sind Bestandteile des Messprotokolls.

Nur VF/ZF:

6. Beachten Sie bei der Diskussion der Ergebnisse und Messunsicherheiten in Ihrem Bericht die Relevanz verschiedener Einflussgrößen auf die Güte Ihrer Messung unter Berücksichtigung des Zusatzmaterials im Anhang.

Messprotokollvorschlag

Name, Versuch, Datum, evtl. Versuchsplatz

Messung der zehnfachen Schwingungsdauer $10\,T$ eines Pendels im Nulldurchgang (feste unbekannte Länge L_0)

N	$10\,T_i/\mathrm{s}$	T_i/s	$(T_i-\overline{T})/10^{-4}\mathrm{s}$	$(T_i-\overline{T})^2/10^{-8}\mathrm{s}^2$
1				
2				
...				
25				
		Mittelwert $\overline{T}=\frac{1}{25}\sum_1^{25}T_i=$		$\sum v_i^2=\sum_1^{25}(T_i-\overline{T})^2$

Der Mittelwert darf immer eine Stelle genauer angegeben werden als die Genauigkeit der einzelnen Messung.

Aus $\sum v_i^2$ ermittelt man dann die Standardabweichung (mittlerer Unsicherheit der Einzelmessung) und den Vertrauensbereich (mittlerer Unsicherheit des Mittelwertes).

Messung der zehnfachen Schwingungsdauer $10\,T$ eines Pendels im Umkehrpunkt (feste unbekannte Länge L_0)

Hier kann die gleiche Messtabelle wie bei Aufgabe 1.a verwendet werden. Es werden sich jedoch andere Werte für Standardabweichung und Vertrauensbereich ergeben, da die Messung im Umkehrpunkt ungenauer ist (Warum?)

Messung der einfachen Schwingungsdauer T eines Pendels (feste unbekannte Länge L_0)

N	T_i/s	$(T_i-\overline{T})/10^{-3}\mathrm{s}$	$(T_i-\overline{T})^2/10^{-6}\mathrm{s}^2$
1			
2			
...			
...			
25			
	Mittelwert $\overline{T}=\frac{1}{25}\sum_1^{25}T_i=$		$\sum v_i^2=\sum_1^{25}(T_i-\overline{T})^2$

Sie werden an der Größe der Messunsicherheit merken, dass die Messung nur einer Schwingungsperiode ungenauer ist.

Messung der zehnfachen Schwingungsdauer 10 T für 10 verschiedene Fadenlängen

n	$L_i\,/\text{cm}$	$10T_i\,/\text{s}$	$T_i\,/\text{s}$	$T_i^2\,/\text{s}^2$
1	0			
2	4			
3	8			
4	12			
5	16			
6	20			
7	24			
8	28			
9	32			
10	36			

Es ist sinnvoll, in der Tabelle gleich T^2 zu berechnen, da es für die grafische Darstellung $T^2 = f(L_i)$ benötigt wird.

Hinweise zur Anfertigung der grafischen Darstellung (Aufgabe 5):

- Fertigen Sie die grafische Darstellung $T^2 = f(L_i)$ auf Millimeterpapier an. Wählen Sie dabei den Maßstab der Achsen so, dass Sie das Blatt optimal ausnutzen.
- Zeichnen Sie bei allen Messpunkten die Messunsicherheit für ΔL_i (maximale Messunsicherheit abschätzen) und für T^2 ein. Die Unsicherheit für T^2 ergibt zu $2T \cdot \Delta T$, wobei die Messunsicherheit dieses Messverfahrens bereits in Aufgabe 2 ermittelt wurde. Die in Aufgabe 2 erhaltene Standardabweichung bei Messung der zehnfachen Schwingungsdauer im Nulldurchgang des Pendels, sollte in eine prozentuale Messunsicherheit umgerechnet werden, um die Unsicherheit der Schwingungsdauer bei verschiedenen Fadenlängen einfacher berechnen zu können.
- Legen Sie durch die Datenpunkte eine Ausgleichsgerade mit dem Lineal. Beachten Sie dabei die Hinweise aus dem Skript „Hinweise zum Praktikum und zur Auswertung von Messergebnissen“ hinsichtlich des Schwerpunktes der Ausgleichsgeraden. Bestimmen Sie den Anstieg und bestimmen Sie daraus die Erdbeschleunigung.
- Legen Sie zwei weitere Geraden (kleinster und größter möglicher Anstieg) durch die Messpunkte. Bestimmen Sie deren Anstiege und ermitteln Sie daraus die Unsicherheit der gemessenen Erdbeschleunigung.

Nachtrag zur Diskussion der Messunsicherheiten:

Bei der Diskussion der Ursache der Unsicherheiten Ihrer Messergebnisse denken Sie zunächst über den Einfluss der im folgenden aufgelisteten Parameter auf die Genauigkeit Ihres Messergebnisses nach.

Einfluss der Kleinwinkelnäherung

Für die Diskussion der Unsicherheit (z. B. mögliche Ursachen für Abweichungen des Messergebnisses vom Literaturwert) sei hier die (nicht genäherte) Abhängigkeit der Schwingungsdauer vom Auslenkwinkel des Pendels gegeben

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \left[1 + \left[\frac{1}{2}\right]^2 \sin^2\frac{\varphi}{2} + \left[\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right]^2 \sin^4\frac{\varphi}{2} + \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right]^2 \sin^6\frac{\varphi}{2} + \ldots\right] \quad .$$

Dieser funktionale Zusammenhang ist in Abb. 2 dargestellt.

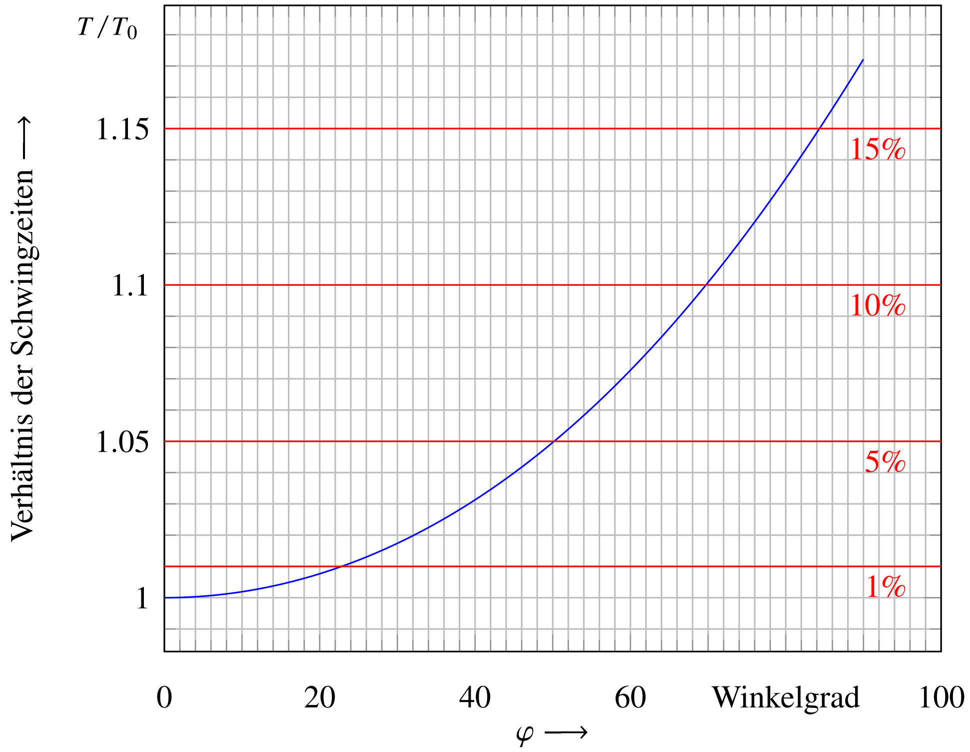

Abbildung 2: Abhängigkeit von T/T_0 vom maximalen Auslenkungswinkel φ, wobei $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ist.

Auftrieb in Luft

Wie ein Körper im Wasser, erfährt auch ein Körper in einem Gas, wie der Luft, einen Auftrieb, der Abhängig von der Dichte des Körpers und der Luft ist. Dies führt zu einer Reduzierung der wirkenden Masse m'

$$m' = m\left[1 - \frac{\rho_{\text{Luft}}}{\rho}\right]$$

Die Dichte der Kugel beträgt $\rho = 1700\,\text{kg}/\text{m}^3$ und die der Luft in der Standardatmosphäre (15 °C, und 1013,25 hPa) $\rho = 1{,}2\,\text{kg}/\text{m}^3$. Damit würde sich die Masse des Pendels um 0,07 % durch den Auftrieb in der Luft reduzieren.

Räumliche Ausdehnung des Pendelkörpers

Da der Versuch mit einem Pendel, dessen Körper keine punktförmige Massenverteilung hat, durchgeführt wurde, müsste bei der Betrachtung der Schwingung um den Punkt der Aufhängung des Pendels das Trägheitsmoment des Pendelkörpers berücksichtigt werden. Wie dieses Bestimmt werden kann, lernen Sie im Versuch M7 kennen. Es lässt sich zeigen, dass die Berücksichtigung der Ausdehnung des Pendelkörpers zu einer Vergrößerung der effektiven Pendellänge l führt, wobei R der Radius der Kugel ist:

$$l' = l\left[1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2}\right]$$

Bei einer Pendellänge von 1 m und einem Radius des Pendelkörpers von 3 cm würde dies eine Änderung um 0,04 % bedeuten.

Einfluss der Reibung

Um den Einfluss der Reibung, bei dem das Pendel mechanisch Energie verliert $(F_\mathrm{R} = -\mathrm{konst.} \cdot v)$ auf die Messung abzuschätzen, muss thematisch wiederum etwas vorgegriffen werden. Liegt Reibung bei dem Messaufbau vor, so macht sich dies als exponentielle Abnahme der Amplitude der Schwingung mit der Zeit bemerkbar.[1] Diese Dämpfung der Schwingung lässt sich mit dem Parameter δ beschreiben. Somit gilt für die Amplitude $A(t) = A_0 \cdot \exp\left(-\delta \cdot t\right)$, dabei ist A_0 die maximale Auslenkung beim Start der Messung. Es lässt sich zeigen, dass die Periodendauer auch durch die Dämpfung beeinflusst wird. Es gilt: $T_\text{Dämpfung} = \frac{2\pi}{\sqrt{(g/l)-\delta^2}}$. Unter der Annahme, dass die Pendellänge l=1 m ist und das die Amplitude innerhalb von t=100 s um 10 % abnimmt, also eine Dämpfungskonstante von δ = 0,0230 1/s vorliegt, würde sich die Periodendauer um 0,00002 s verlängern.

[1] Eine genauere Betrachtung werden Sie im Versuch M10 machen.