Impulserhaltung in zwei Dimensionen (M5)

Ziel des Versuches

Am Beispiel der Impulserhaltung in zwei Dimensionen gibt dieser Versuch eine Einführung in die Videoanalyse von Bewegungen, wie sie in der naturwissenschaftlichen Forschung, z. B., der videobasierten Verfolgung der Bewegung von Körpern in der Biophysik, Anwendung findet. Hier wird die Bewegung zweier Scheiben, die elastisch zusammenstoßen mit einer Videokamera aufgezeichnet. Die Bewegung erfolgt auf einem Luftkissentisch nahezu reibungsfrei. Per Videoanalyse werden die Bewegungsbahnen der Körper ermittelt und daraus die Impuls- und Energieerhaltung im Zweidimensionalen überprüft. Optional kann der Stoß einer runden Scheibe mit einer hantelförmigen Scheibe untersucht und deren Schwerpunkt- und Rotationsbewegung analysiert werden.

Theoretischer Hintergrund

Im Gegensatz zum eindimensionalen Stoß (z. B. unelastischer Stoß beim Schmieden oder nahezu elastischer Stoß zwischen zwei Waggons auf einer Schiene) treten beim zweidimensionalen und nicht zentralen Stoß Richtungsänderungen auf, die von der Masse und Geschwindigkeit der Stoßpartner abhängen. Im Folgenden wird der Stoß zwischen zwei Scheiben A (Masse m_A) bzw. B (Masse m_B) mit den Geschwindigkeiten $\vec{v}_\mathrm{A}$ bzw. $\vec{v}_\mathrm{B}$ vor dem Stoß und den Geschwindigkeiten $\vec{u}_\mathrm{A}$ und $\vec{u}_\mathrm{B}$ nach dem Stoß betrachtet. Die gestoßene Scheibe B soll sich vor dem Stoß in Ruhe befinden, sodass stets $\vec{v}_\mathrm{B} = 0$ gilt. Da sich beide Scheiben auf dem Luftkissentisch nur in x- und y-Richtung bewegen können, ergibt sich die in Abb. 1 gezeigte Situation. Die Bewegungsrichtungen und Impulse der Scheiben nach dem Stoß hängen davon ab, wie versetzt sich die Scheiben treffen.

Nach dem Impulserhaltungssatz gilt dann für die Komponenten

$$m_\mathrm{A} v_{\mathrm{A}x} = m_\mathrm{A} u_{\mathrm{A}x} + m_\mathrm{B} u_{\mathrm{B}x} \tag{1}$$

$$m_\mathrm{A} v_{\mathrm{A}y} = m_\mathrm{A} u_{\mathrm{A}y} + m_\mathrm{B} u_{\mathrm{B}y} \quad . \tag{2}$$

Darüber hinaus bleibt beim elastischen Stoß die kinetische Energie erhalten. Es gilt also:

$$\frac{1}{2} m_\mathrm{A} v_\mathrm{A}^2 = \frac{1}{2} m_\mathrm{A} u_\mathrm{A}^2 + \frac{1}{2} m_\mathrm{B} u_\mathrm{B}^2 \quad . \tag{3}$$

Es gilt bekanntlich:
$\vec{v}^2 = |v| \cdot |v| \cos(v, v) = v^2$

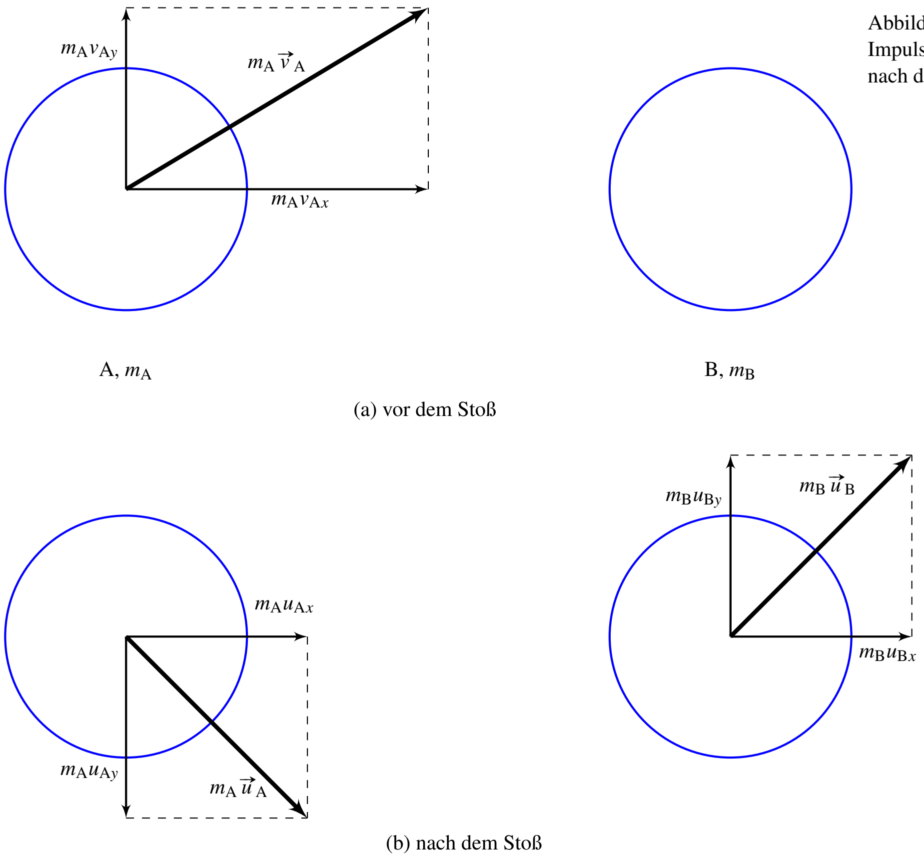

Abbildung 1: Schematische Darstellung der Impulse und ihrer Komponenten vor und nach dem Stoß

Gleiche Massen beider Stoßpartner

Für den Spezialfall $m_A = m_B$, d. h. wenn beide Scheiben gleiche Massen haben, reicht es aus, nur die Geschwindigkeitskomponenten zu betrachten, da die Masse als konstanter Faktor eingeht. Somit reduzieren sich die Gleichungen (1) und (2) auf eine Addition der jeweiligen Geschwindigkeitskomponenten und aus (3) ergibt sich für die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}_A$, $\vec{u}_A$, $\vec{u}_B$ die pythagoreische Formel

$$\vec{v}_A^2 = \vec{u}_A^2 + \vec{u}_B^2 \quad . \tag{4}$$

Die Bahnen der gestoßenen Scheiben schließen in diesem Fall immer einen rechten Winkel ein, wie in Abb. 2 gezeigt. Verschiebt man den Geschwindigkeitsvektor $\vec{u}_B$ parallel nach oben, so sieht man, dass sich stets ein rechtwinkliges Dreieck DEF ergibt, dessen Punkt F auf dem Thaleskreis über der Strecke $\overline{\mathrm{DE}} = \vec{v}_A$ liegt.

Ungleiche Massen oder Formen beider Stoßpartner

Beim nicht zentralen elastischen Stoß zweier Scheiben ungleicher Masse hängen die Impulse und damit auch der Winkel zwischen Ihren Bahnen nach dem Stoß zusätzlich vom Verhältnis ihrer Massen ab. Zur Überprüfung der Impuls- und Energieerhaltung sind die vollständigen Formeln (1) bis (3) zu verwenden.

Verwendet man anstelle der zu stoßenden runden Scheibe eine hantelförmige Scheibe C, so wird beim Stoß zusätzlich eine Rotationsbewegung der hantelförmigen Scheibe mit der Winkelgeschwindigkeit ω erzeugt. Ruht die

Scheibe C vor dem Stoß, so gilt bei einem elastischen Stoß für die Erhaltung der kinetischen Energie

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{A}v_\mathrm{A}^2 = \frac{1}{2}m_\mathrm{A}u_\mathrm{A}^2 + \frac{1}{2}m_\mathrm{C}u_\mathrm{C}^2 + \frac{1}{2}J_\mathrm{C}\omega_\mathrm{C}^2 \quad , \tag{5}$$

wobei $J_\mathrm{C} = (179 \pm 1)\,\mathrm{g\,cm^2}$ das Trägheitsmoment unserer hantelförmigen Scheibe ist. Für die Überprüfung der Impulserhaltung sind die Schwerpunktbewegungen der Stoßpartner relevant.

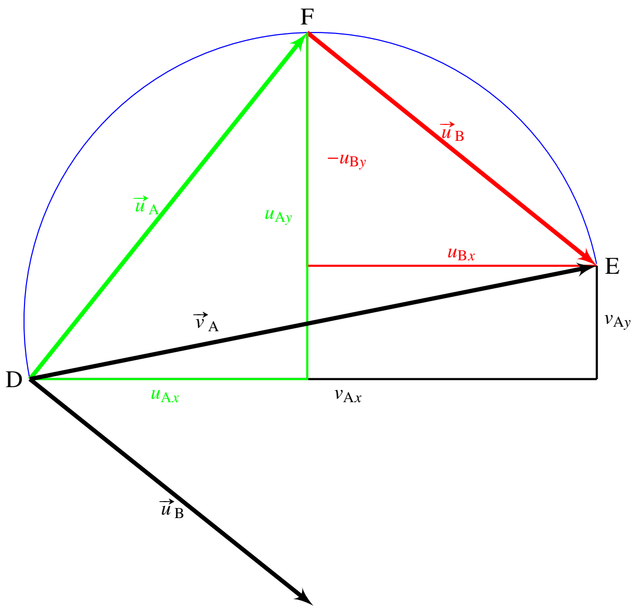

Abbildung 2: Geschwindigkeitsvektoren und deren Komponenten im Fall gleicher Massen $m_\mathrm{A} = m_\mathrm{B}$ der beiden Stoßpartner bei $\vec{v}_\mathrm{B} = 0$. Die Bahnen der Stoßpartner nach einem nicht zentralen Stoß schließen hier immer einen rechten Winkel ein.

Versuchsaufbau- und durchführung

Die Experimente werden auf einem Luftkissentisch durchgeführt und die Bewegung der Scheiben mit Hilfe einer Videokamera aufgezeichnet. Die Scheiben A und B sind Plastikscheiben mit aufgeklebten Neodymmagneten, deren Nord- und Südpol sich oben und unten befinden. Dadurch entstehen um die Scheiben herum rotationssysmmetrische Magnetfelder, die sich abstoßen, sobald sich die Scheiben sehr nahe kommen.[1] Auf den Rand des Luftkissentisches kann ein kleiner PVC-Quader (Starter) aufgesetzt werden, der einen Neodymmagneten enthält und an seiner Längsseite eine Einkerbung besitzt.[2]

Da der Magnet im Starter in Bezug auf seine Längsseiten nicht mittig untergebracht ist, stehen dem Experimentator prinzipiell zwei verschiedene Startgeschwindigkeiten für die Scheibe A zur Verfügung, je nachdem welche Längsseite des Starters der Scheibe zugewandt ist.

Zur Aufzeichnung wird das Programm *VirtualDub* verwendet und die Auswertung erfolgt mit dem Programm *MeasureDynamics*. Detaillierte Hinweise zur Bedienung der beiden Programme finden Sie am Versuchsplatz.

Die im Versuch verwendeten Scheiben sind zuerst zu wiegen, dabei muss zwischen Waagschale und zu wiegender (magnetischer!) Scheibe ein mehrere cm großer Abstand sein[3], da sonst der Messwert verfälscht wird.

[1] Die Magnetfeldstärke ist so gewählt, dass sich beide Scheiben beim zu untersuchenden Stoßprozess elastisch abstoßen, sich aber dabei nicht berühren können.

[2] Wird die Scheibe A in die Einkerbung des Starters geführt und festgehalten so setzt sie sich nach dem Loslassen immer mit der gleichen Geschwindigkeit und in etwa gleicher Richtung in Bewegung.

[3] Durch einen Holzquader o. ä.

Danach wird die Scheibe B in eine ruhende Position auf dem Luftkissentisch gebracht.[4] Kurz vor dem Loslassen der Scheibe A ist die Videoaufzeichnung zu starten.

[4] Dazu ist eventuell eine Justage des Luftkissentisches notwendig.

Nachdem das aufgenommene Video in das Programm *MeasureDynamics* importiert wurde, wird dort der Ursprung des Koordinatensystems, der Maßstab[5] (möglichst hier in cm), die Start- und Endmarke für die Videoanalyse und die Schrittweite des Videos festgelegt. Es reicht aus jedes zweite oder auch dritte Videovollbild für die Analyse zu nutzen.

[5] Es bietet sich an, dafür Länge und Breite des Luftkissentisches zu verwenden.

Das Programm *MeasureDynamics (Bewegungsanalyse mit Farbanalyse)* liefert Ihnen für das von Ihnen farblich ausgewählte Objekt eine Tabelle mit den Werten der Zeit t, den Ortskoordinaten x, y und den Geschwindigkeitskomponenten u_x bzw. v_x und u_y bzw. v_y sowie ein Diagramm.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten des jeweiligen Objekts vor und nach dem Stoß ist es jedoch von Vorteil nur die Zeitwerte und die Werte der Ortskoordinaten wie folgt zu verwenden: Man sucht sich Bereiche (Diagramm anschauen), in denen die geradlinigen Bewegungen vor und nach dem Stoß der entsprechenden Scheibe sehr gut beobachtbar sind. Dort bestimmt man jeweils zwischen ca. 5 Messpunkten die Zeitdifferenz und den Wert der Differenz zwischen den entsprechenden x-Ortskoordinaten und ermittelt daraus die mittlere Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung. Für die Bestimmung der gemittelten Wertes für v_y und u_y geht man analog vor.

Um die Tabellenblätter inkl. Diagramm zu drucken, müssen diese vorher (z. B. auf dem Desktop) gespeichert werden.

Aufgaben

1. Nehmen Sie mindestens fünf Stoßprozesse zwischen zwei Scheiben gleicher Masse auf, bei denen die Scheibe B vor dem Stoß ruht und die Scheibe A jeweils die gleiche Startgeschwindigkeit besitzt.

2. Bestimmen Sie jeweils die Geschwindigkeitskomponenten beider Scheiben vor und nach dem Stoß und den Winkel zwischen den Geschwindigkeitsvektoren beider Scheiben nach dem Stoß.

3. Zeichnen Sie für zwei dieser Stoßprozesse die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}_{\mathrm{A}}$, $\vec{u}_{\mathrm{A}}$, $\vec{u}_{\mathrm{B}}$ und den Thaleskreis auf Millimeterpapier!

4. Ermitteln Sie die kinetischen Energien vor dem Stoß und nach dem Stoß und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

5. Nehmen Sie mind. zwei Stoßprozesse zwischen unterschiedlich schweren Scheiben auf und weisen Sie die Impulserhaltung und die Erhaltung der kinetischen Energie nach.

Nur VF/ZF:

6. Untersuchen Sie den Stoß zwischen einer runden Scheibe und einer gestoßenen hantelförmigen Scheibe, die vor dem Stoß ruht. Überprüfen Sie die Impulserhaltung für die Schwerpunktbewegungen. Ermitteln Sie die Rotationsgeschwindigkeit der hantelförmigen Scheibe nach dem Stoß und überprüfen Sie die Erhaltung der kinetischen Energie anhand von Formel (5).