

Seltsame Attraktoren in der Inversen 3D Hénon-Abbildung

Liane Kluge

October 12, 2019

Der *Lorenz*-Attraktor ist ein seltsamer Attraktor, der chaotisches Verhalten ausweist und für bestimmte Parameterbereiche im *Lorenz*-System auftritt. Das *Lorenz*-System ist ein kontinuierliches dynamisches System, bestehend aus drei gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen. Die Existenz von Attraktoren, welche dem *Lorenz*-Attraktor ähnlich sind, konnte in einigen diskreten dynamischen Systemen, wie der dreidimensionalen *Hénon*-Abbildung, bereits nachgewiesen werden. Die dreidimensionale *Hénon*-Abbildung ist eine quadratische Abbildung mit konstanter Funktionaldeterminante. In dieser Ausarbeitung wird der Frage nachgegangen, ob ein dem *Lorenz*-Attraktor ähnlicher Attraktor auch in der inversen dreidimensionalen *Hénon*-Abbildung existieren kann. Diesbezüglich werden erste analytische und numerische Untersuchungen präsentiert. Berechnungen der *Lyapunov*-Exponenten als auch der *Kaplan-York*-Dimension, ermittelte seltsame Attraktoren und Stabilitätsuntersuchungen der inversen dreidimensionalen *Hénon*-Abbildung werden ebenfalls aufgeführt.

Inhalte

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Einleitung | 2 |
| 1.1 | Dynamische Systeme | 4 |
| 1.2 | Attraktoren und seltsame Attraktoren | 5 |
| 2 | Bestimmung der Inversen 3D Hénon-Abbildung | 6 |
| 3 | Gleichgewichte – Ermittlung, Stabilität, Existenz seltsamer Attraktoren | 7 |
| 4 | Zweiperiodische Punkte – Ermittlung, Stabilität, Existenz seltsamer Attraktoren | 9 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5 | Vierperiodische Punkte – Ermittlung, Existenz seltsamer Attraktoren | 12 |
| 6 | Lyapunov Exponenten | 15 |
| 7 | Diskussion und Ausblick | 21 |

1 Einleitung

Eines der am meisten untersuchten diskreten dynamischen Systeme, welches einen seltsamen Attraktor aufweist, ist die zweidimensionale *Hénon*-Abbildung

$$x \mapsto 1 + y - ax^2, \quad y \mapsto bx, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

die eine vereinfachte Version der zur *Lorenz*-Gleichung gehörende *Poincaré*-Abbildung darstellt [1, 2].

In Abbildung 1 ist der *Hénon*-Attraktor mit fraktaler Dimension von (ungefähr) 1.261 für die Parameterwerte $a = 1.4$ und $b = 0.3$ dargestellt [3].

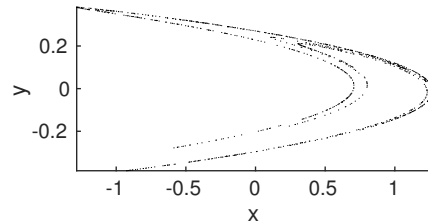


Abbildung 1: *Hénon*-Attraktor ($a = 1.4, b = 0.3, 10^8$ Iterationen).

Eine mögliche (natürliche) Erweiterung der zweidimensionalen *Hénon*-Abbildung ist die dreidimensionale *Hénon*-Abbildung, welche gegeben ist durch

$$F(x, y, z; B, M_1, M_2) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \\ M_1 + Bx + M_2y - z^2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

da diese ebenfalls quadratisch ist und auch eine koordinatenunabhängige Kontraktionsrate besitzt. In [4] sowie [5] wurde die Existenz seltsamer Attraktoren für (1) bewiesen. In Abbildung 2 sind zwei seltsame Attraktoren von (1) abgebildet. Dabei ist in (a) ein ähnlicher Attraktor (rote Projektion), wie in Abbildung 1, und in (b) ein Attraktor ähnlich dem *Lorenz*-Attraktor zu erkennen.

In dieser Ausarbeitung soll die Dynamik folgender dreidimensionaler quadratischer Abbildung

$$F(x, y, z; B, M_1, M_2) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \\ M_1 + Bx + M_2z - y^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

untersucht werden, wobei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und $B, M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ Parameter sind. Diese Abbildung kann nach geeigneter Transformation als Inverse ($B \neq 0$) von (1) angesehen werden.

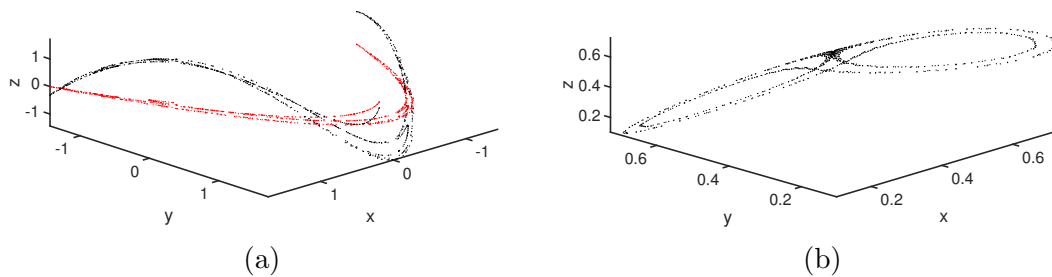


Abbildung 2: Attraktoren (in schwarz) der Abbildung (1) nach 10^8 Iterationen. (a) $B = 0.1, M_1 = 1.4, M_2 = 0.2$, Projektion auf die (x, y) -Koordinaten in rot. (b) $B = 0.7, M_1 = 0, M_2 = 0.81$.

Das Ziel dieser Ausarbeitung besteht darin, neben Stabilitätsuntersuchungen für Fix- und zweiperiodische Punkte, Attraktoren, seltsame Attraktoren und insbesondere dem *Lorenz*-Attraktor ähnliche Attraktoren für (2) numerisch zu ermitteln und erste analytische Untersuchungen zur Existenz zu präsentieren. Im Bezug auf die Existenz seltsamer Attraktoren für (2) wurden erste numerische Ergebnisse in [6] für positive Werte von B vorgestellt. In dieser Ausarbeitung werden wir zudem auch Ergebnisse für negative Werte von B präsentieren. Darüber hinaus präsentieren wir numerische Berechnungen der *Lyapunov*-Exponenten sowie der *Kaplan-York*-Dimension in Abhängigkeit von den Parametern M_1 und M_2 für $B = 0.7$ und $B = -0.7$ fest.

Bei der Untersuchung der Existenz von seltsamen Attraktoren für (2) wollen wir die Erkenntnisse aus [5, 7] nutzen. Demnach können bei dem von uns betrachteten dreidimensionalen diskreten System Bifurkationen von periodischen Orbits zu dem *Lorenz*-Attraktor ähnlichen Attraktoren führen. Dabei muss ein Fix- oder periodischer Punkt vorliegen und die Jacobimatrix die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -1$ aufweisen. Zudem muss eine bestimmte "Blockstruktur" der jordanischen Normalform der Jacobimatrix vorliegen.

Der Kern dieser Ausarbeitung besteht darin, zu überprüfen, ob das System (2) einen Parameterbereich aufweist, sodass Gleichgewichte, zweiperiodische Punkte und vierperiodische Punkte existieren, für welche die eben genannten Forderungen zutreffen. Falls solch ein Punkt im Phasenraum ermittelt werden kann, sind noch einige weitere Schritte notwendig, um zu entscheiden, ob ein *Lorenz*-ähnlicher Attraktor in der Nähe existiert. Hier werden wir numerische Untersuchungen durchführen, da die weitere analytische Betrachtung sehr komplex ist. Für die weitere analytische Untersuchung müsste das System (2) zunächst durch ein kontinuierliches dynamisches System approximiert werden, sodass dieses System und dessen Normalform auf die in [7] betrachteten Fälle zutrifft. Dann kann durch eine Skalierung das *Shimizu-Morioka*-System betrachtet werden, in dem ein dem *Lorenz*-Attraktor ähnlicher Attraktor, der *Shimizu-Morioka*-Attraktor, für einen bestimmten Parameterbereich existiert. Rückskalierung liefert dann die gewünschte Aussage [7].

Da der Fokus dieser Ausarbeitung auf der Ermittlung von (seltsamen) Attraktoren liegt, werden wir im Folgenden eine Einführung in Attraktoren geben und in diesem Zusammenhang auch dynamische Systeme charakterisieren.

1.1 Dynamische Systeme

Die Wachstumsdynamik von Populationen, das Strömungsverhalten von Gasen und Flüssigkeiten, sowie der Bewegungsablauf eines Federpendels sind Beispiele für deterministische zeitabhängige Vorgänge, welche durch *Dynamische Systeme* modelliert werden können. Diese sind wie folgt definiert.

Definition 1 ([2]). Sei (M, d) ein metrischer Raum, $M \neq \emptyset$, $T \subset \mathbb{R}$ und $\phi : T \times M \rightarrow M$ eine Abbildung. Dann heißt $\{T, M, \phi\}$ ein dynamisches System falls gilt:

1. $\phi(0, x_0) = x_0$ für alle $x_0 \in M$,
2. $\phi(t + s, x_0) = \phi(s, \phi(t, x_0))$ für alle $x_0 \in M$ und $s, t \in T$.

Der metrische Raum M wird auch als Phasenraum bezeichnet und umfasst alle möglichen Zustände, welche das (modellierte) System annehmen kann. Die betrachteten Zeitpunkte werden durch die Menge T beschrieben. Die Zustandsänderung in Abhängigkeit von der Zeit wird durch die Abbildung ϕ charakterisiert. Befindet sich das System so zur Zeit $t = 0$ in x_0 , so ist es zum Zeitpunkt $t = t_*$ in $\phi(t_*, x_0)$.

Bei der Zustandsänderung eines dynamisches Systems wird zwischen diskreten und kontinuierlichen Systemen unterschieden. Letztere beschreiben Vorgänge, die sich in infinitesimal kleinen Zeitabständen verändern, wobei meistens $T = \mathbb{R}_0^+$ bzw. $T = \mathbb{R}$ gilt. Kontinuierliche dynamische Systeme kommen meistens im Zusammenhang mit gewöhnlichen Differentialgleichungen zum Einsatz.

Bei diskreten dynamischen Systemen erfolgt die Zustandsänderung in äquidistanten Zeitschritten, wobei für die Menge der Zeitpunkte T in der Regel $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$ oder $T = \mathbb{Z}$ gilt [2]. Diskrete dynamische Systeme werden häufig durch eine Abbildungsvorschrift $F : M \rightarrow M$ angegeben, wobei (M, d) einen metrischen Raum darstellt. In diesem Zusammenhang gilt dann meistens $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und die Abbildung ϕ ist durch die Iterierten der Abbildung F charakterisiert. Es gilt: $\phi(t, x_0) = F^t(x_0)$, $x_0 \in M$.

Ein einfaches und typisches Beispiel für ein diskretes dynamisches System mit chaotischem Verhalten ist die logistische Abbildung (auch logistische Gleichung genannt)

$$x \mapsto rx(1 - x), \quad r \in \mathbb{R}.$$

In diesem Zusammenhang definieren wir

Definition 2 ([8]). Eine Abbildung ϕ eines dynamischen System $\{T, M, \phi\}$ heißt chaotisch bezüglich einer invarianten Menge $M' \subseteq M$, wenn

1. ϕ ist transitiv auf M' ,

2. ϕ besitzt sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen auf M' .

Insbesondere der zweite Punkt ist stark mit dem Begriff der *Lyapunov*-Exponenten verbunden, auf dessen numerische Berechnung für das System (2) wir in Abschnitt 6 eingehen werden.

Es sei angemerkt, dass die obige Definition von Chaos nicht mit der verbreiteten Definition nach *R. Devaney* übereinstimmt [9]. Letztere beinhalten noch die Bedingung, dass die periodischen Orbits von ϕ dicht in M' liegen.

1.2 Attraktoren und seltsame Attraktoren

Bei der Diskussion der Dynamik des Systems (2) sind wir besonders an dem Langzeitverhalten interessiert. Unter letzterem verstehen wir das Verhalten des Systems für $t \rightarrow \infty$ bei vorgegebenen Anfangszustand. In enger Verbindung steht hier der Begriff des *Attraktors*. Um diesen zu beschreiben, definieren wir zunächst den Begriff einer *invarianten* und einer *attraktiven* Menge und einer *topologisch transitiven* Abbildung. Hierbei beschränken wir uns auf diskrete dynamische Systeme.

Definition 3 ([10]). Sei $\{\mathbb{N} \cup \{0\}, M, \phi\}$ ein diskretes dynamisches System und A eine abgeschlossene Teilmenge von M , mit $A \neq \emptyset$.

1. Wir nennen A invariant, falls für alle $t \in T$ gilt: $\phi(t, A) = A$.
2. Wir nennen A attraktiv, falls eine Umgebung U von A existiert, sodass gilt: Für jede Umgebung V von A ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\phi(t, U) \subseteq V$ für $t \geq N$.

Definition 4 ([10]). Sei $\{\mathbb{N} \cup \{0\}, M, \phi\}$ ein diskretes dynamisches System und A eine ϕ -invariante Teilmenge von M . Falls für alle nicht leeren Teilmengen U und V von A ein $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existiert mit

$$\phi(t, U) \cap V \neq \emptyset ,$$

so nennen wir ϕ topologisch transitiv auf A .

Definition 5 ([10]). Sei $\{\mathbb{N} \cup \{0\}, M, \phi\}$ ein diskretes dynamisches System und A eine ϕ -invariante attraktive Teilmenge von M . Falls ϕ topologisch transitiv auf A ist, so heißt A Attraktor des Systems $\{\mathbb{N} \cup \{0\}, M, \phi\}$.

Intuitiv ist ein Attraktor eines (diskreten) dynamisches Systems eine abgeschlossene Untermenge eines Phasenraumes, auf die sich eine Menge von Punkten im Laufe der Zeit zubewegt und die im weiteren Zeitverlauf nicht mehr verlassen wird.

Eingeführt wurde die Eigenschaft *seltsam* unter der Bedingung, dass ein Attraktor eine fraktale Struktur aufweist, sich also die topologische- und die *Hausdorff*-Dimension

unterscheiden [11]. Es existieren auch seltsame Attraktoren, welche nicht-chaotisch sind, also keine sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen besitzen [12]. Aus diesem Grund betrachten wir, analog zur Definition in [13], einen Attraktor als *seltsam*, falls er Definition 5 genügt und zusätzlich sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen besitzt. Der Begriff *seltsam* bezieht sich also auf die Dynamik des Attraktors und nicht nur auf seine Geometrie. Dies gilt sowohl für kontinuierliche als auch diskrete Systeme. Zum Beispiel trifft diese Definition auf den *Lorenz*-Attraktor und den *Hénon*-Attraktor (Abbildung 1) zu. Da die sensitive Abhängigkeit stark mit den *Lyapunov*-Exponenten zusammen hängt, sprechen wir im weiteren Verlauf dieser Ausarbeitung von einem *seltsamen Attraktor* (engl. *strange attractor*), falls seine *Lyapunov*-Dimension (auch *Kaplan-York*-Dimension genannt, siehe § 6) nicht ganzzahlig ist.

2 Bestimmung der Inversen 3D Hénon-Abbildung

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass das System (2) nach geeigneter Transformation als Umkehrabbildung der dreidimensionalen *Hénon*-Abbildung (1) angesehen werden kann. Wir nehmen dazu an, dass für den Parameter B des Systems (1) $B \neq 0$ gilt, da für $B = 0$ aufgrund der verletzten Eigenschaft der Injektivität keine Umkehrabbildung bestimmbar ist. Sei nun im System (1) also $B \neq 0$. Die Inverse ist dann durch die Abbildung

$$G(x, y, z; B, M_1, M_2) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{M_2}{B}x + \frac{1}{B}y^2 + \frac{1}{B}z - \frac{1}{B}M_1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

gegeben.

Wir betrachten nun die transformierte Abbildung

$$F(x, y, z; B, M_1, M_2) := (H_1 \circ H_2 \circ G \circ H_1)(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ \frac{M_1}{B^2} - \frac{M_2}{B}z + \frac{1}{B}x - y^2 \end{pmatrix},$$

wobei H_1 und H_2 durch die Abbildungsvorschriften

$$H_1(a, b, c) : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_2(a, b, c) : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - (1 + \frac{1}{B})c^2 + \frac{M_1}{B} + \frac{M_2}{B^2} \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

charakterisiert werden.

In dem wir weiterhin $M_1^{inv} := \frac{M_1}{B^2}$, $M_2^{inv} := -\frac{M_2}{B}$ und $B^{inv} := \frac{1}{B}$ definieren, erhalten wir die Vorschrift

$$F(x, y, z; B^{inv}, M_1^{inv}, M_2^{inv}) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \\ M_1^{inv} + B^{inv}x + M_2^{inv}z - y^2 \end{pmatrix}.$$

Umbenennung der Parameter liefert das System (2).

3 Gleichgewichte – Ermittlung, Stabilität, Existenz seltsamer Attraktoren

In diesem Abschnitt werden wir die Gleichgewichte des Systems (2) in Abhängigkeit der Parameter B, M_1, M_2 bestimmen und danach auf deren Stabilitätseigenschaften eingehen. Dazu ist zuerst die Gleichung $F(x, y, z) = (x, y, z)^\top$ zu lösen. Dies liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x &= y \\y &= z \\z &= M_1 + Bx + M_2z - y^2\end{aligned}$$

und somit die Bedingung $x = y = z$ in einem Gleichgewichtspunkt. Sei also nun $x = y = z$, dann liefert die letzte Zeile die Gleichung

$$x^2 - (B + M_2 - 1)x - M_1 = 0 \quad (3)$$

und somit die Lösungen

$$\begin{aligned}x_+^{(1)} &= -\frac{1}{2}(1 - B - M_2) + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - B - M_2)^2 + 4M_1} \\x_-^{(1)} &= -\frac{1}{2}(1 - B - M_2) - \frac{1}{2}\sqrt{(1 - B - M_2)^2 + 4M_1}\end{aligned}$$

welche nur im Fall

$$D^{(1)} := (1 - B - M_2)^2 + 4M_1 \geq 0$$

existieren und für $D^{(1)} > 0$ unterschiedlich sind.

Im weiteren Verlauf werden wir die Bifurkationsbedingungen der Gleichgewichte $P_+^{(1)} = (x_+^{(1)}, x_+^{(1)}, x_+^{(1)})$ und $P_-^{(1)} = (x_-^{(1)}, x_-^{(1)}, x_-^{(1)})$ für feste Werte von B aufstellen (siehe Abbildung 3). Sei also $x^{(1)}$ ein hyperbolisches Gleichgewicht der Abbildung (2) und sollen die Parameter B, M_1, M_2 die Ungleichung $D^{(1)} \geq 0$ erfüllen. Dann kann die Hyperbolizität der Gleichgewichte auf drei Arten verletzt werden. Entweder erreicht ein positiver (oder ein negativer) Eigenwert den Einheitskreis und wir erhalten $\lambda_1 = +1$ (oder $\lambda_1 = -1$), oder ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte erreicht den Einheitskreis, womit $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\phi}$ für $0 < \phi < \pi$ gilt [2].

Die Jacobimatrix von (2) im Gleichgewicht $x^{(1)}$ ist

$$J^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ B & -2x^{(1)} & M_2 \end{pmatrix}$$

mit charakteristischem Polynom

$$p^{(1)}(\lambda) := \lambda^3 - M_2\lambda^2 + 2x^{(1)}\lambda - B.$$

Der zu einer Sattel-Knoten (*fold* oder *limit point bifurcation*) Bifurkation gehörige Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ergibt

$$M_1^1(M_2; B) = -\frac{(1 - B - M_2)^2}{4},$$

was gerade der Rand des Gebietes $D_1 \geq 0$ ist.

Im zweiten Fall mit $\lambda_1 = -1$, also einer Periodenverdopplungsbifurkation (*period-doubling* oder *flip bifurcation*), ergibt sich die Parameterkurve

$$M_1^{-1}(M_2; B) = \frac{1}{4} (3(B + M_2)^2 + 2(B + M_2) - 1), \quad (4)$$

wobei dies im Falle $B + M_2 < 0$ nur für $x_+^{(1)}$ bzw. im Falle $B + M_2 > 0$ nur für $x_-^{(1)}$ erfüllt ist.

Im letzten Fall, der Torus-Bifurkation (*Neimark-Sacker bifurcation*), also einer zur Andronov-Hopf-Bifurkation in kontinuierlichen dynamischen Systemen ähnlichen Bifurkation, erhalten wir unter der Bedingung $B - 2 < M_2 < B + 2$ mit $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\phi}$:

$$M_1^\phi(M_2; B) = \frac{1}{4} ((B(B - 1 - M_2) - M_2 + 2)^2 - (1 - B - M_2)^2),$$

welche im Falle $B(1 - B + M_2) + M_2 < 2$ für $x_+^{(1)}$ bzw. im Falle $B(1 - B + M_2) + M_2 > 2$ für $x_-^{(1)}$ erfüllt ist.

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass die Eigenwerte im Fixpunkt genau dann $\lambda_1 = +1$ und $\lambda_{2,3} = -1$ sind, wenn für die Parameter gilt:

$$B = 1, M_1 = -1/4, M_2 = -1.$$

In diesem Fall ist die jordansche Normalform der Jacobimatrix gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nach der Formel (3.3) in [5] gilt nun aber im Fixpunkt $(c - a)(a - b + c) = -1 < 0$ und somit kann (2) keinen seltsamen *Lorenz* ähnlichen Attraktor nahe des Fixpunktes besitzen.

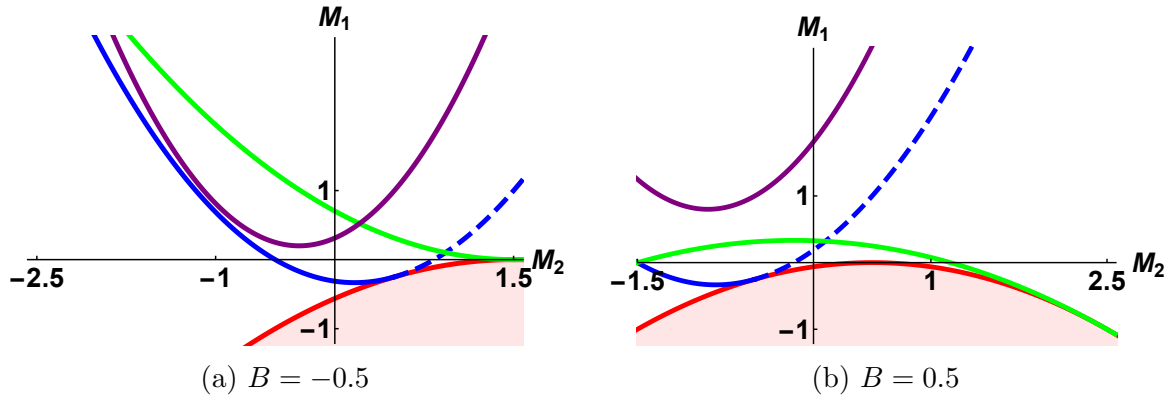


Abbildung 3: Bifurkationskurven für $B = -0.5$ in (a) und $B = 0.5$ in (b). M_1^1 (rot) für $P_{\pm}^{(1)}$, M_1^{-1} (blau) für $P_+^{(1)}$ durchgehend sowie für $P_-^{(1)}$ gestrichelt, M_1^{ϕ} (grün) für $P_+^{(1)}$. Lila Kurve zeigt (7).

4 Zweiperiodische Punkte – Ermittlung, Stabilität, Existenz seltsamer Attraktoren

In diesem Abschnitt sollen Bedingungen an die Parameter B, M_1, M_2 ermittelt werden, unter denen F zweiperiodische Punkte besitzt. Im Anschluss werden Stabilitätsuntersuchungen dieser Punkte diskutiert. Wir berechnen dazu Fixpunkte von $F^2 = F \circ F$, wobei die Fixpunkte aus § 3 triviale Fixpunkte von F^2 sind.

Dazu ist das System

$$\begin{pmatrix} z \\ M_1 + Bx + M_2z - y^2 \\ M_1 + By + M_2(M_1 + Bx + M_2z - y^2) - z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

zu lösen. Es ergibt sich notwendigerweise $x = z$ und somit auch $y^2 + y - M_1 - (B + M_2)x = 0$. Aus diesem Grund ist

$$\begin{aligned} y^2 + y - (B + M_2)x - M_1 &= 0 \\ x^2 + x - (B + M_2)y - M_1 &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Falls $x = y$ gilt, können wir das System auf

$$x^2 + (1 - B - M_2)x - M_1 = 0$$

reduzieren, welche mit (3) übereinstimmt und sich somit die Fixpunkte aus § 3 ergeben.

Sei also nun $x \neq y$ vorausgesetzt, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + x - y + (B + M_2)(x - y) &= 0 \\ \Leftrightarrow -y - 1 - B - M_2 &= x. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir die (unterschiedlichen) zweiperiodischen Fixpunkte $P_+^{(2)} = (x_+^{(2)}, y_-^{(2)}, x_+^{(2)})$ und $P_-^{(2)} = (x_-^{(2)}, y_+^{(2)}, x_-^{(2)})$ mit

$$\begin{aligned}x_+^{(2)} &= -\frac{1}{2}(1 + B + M_2) + \frac{1}{2}\sqrt{D^{(2)}}, \\x_-^{(2)} &= -\frac{1}{2}(1 + B + M_2) - \frac{1}{2}\sqrt{D^{(2)}}, \\y_+^{(2)} &= -\frac{1}{2}(1 + B + M_2) + \frac{1}{2}\sqrt{D^{(2)}}, \\y_-^{(2)} &= -\frac{1}{2}(1 + B + M_2) - \frac{1}{2}\sqrt{D^{(2)}},\end{aligned}$$

welche nur im Fall

$$D^{(2)} := (1 + B + M_2)^2 - 4(B + M_2)(1 + B + M_2) + 4M_1 \geq 0$$

existieren und für $D^{(2)} > 0$ unterschiedlich sind.

Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes werden die Stabilitätseigenschaften der zuvor ermittelten zweiperiodischen Punkte beschrieben. Zur Vereinfachung wird in den folgenden Berechnungen teilweise nur $(x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)})$ anstelle von $(x_+^{(2)}, y_-^{(2)}, x_+^{(2)})$ bzw. $(x_-^{(2)}, y_+^{(2)}, x_-^{(2)})$ geschrieben.

Das charakteristische Polynom der Jacobimatrix von F^2

$$J^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ B & -2y^{(2)} & M_2 \\ BM_2 & B - 2M_2y^{(2)} & M_2^2 - 2z^{(2)} \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch

$$\lambda^3 + (2y^{(2)} + 2z^{(2)} - M_2^2)\lambda^2 + (4y^{(2)}z^{(2)} - 2BM_2)\lambda - B^2. \quad (5)$$

Fordern wir nun, dass $J^{(2)}$ die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -1$ besitzt, liefert dies unter der Bedingung $x^{(2)} = z^{(2)}$ für zweiperiodische Punkte mittels Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned}2x^{(2)} + 2y^{(2)} - M_2^2 &= 1 \\ 2BM_2 - 4x^{(2)}y^{(2)} &= 1 \\ B^2 &= 1.\end{aligned} \quad (6)$$

Letztere Gleichung liefert die beiden zu betrachtenden Fälle $B = 1$ bzw. $B = -1$. Sei also nun zuerst $B = 1$, dann erhalten wir aus den vorherigen Überlegungen die zweiperiodischen Punkte

$$P_+^{(2)} = \left(-\frac{2 + M_2}{2} + \sqrt{4D^{(2)}}, -\frac{2 + M_2}{2} - \sqrt{4D^{(2)}}, -\frac{2 + M_2}{2} + \sqrt{4D^{(2)}} \right)$$

sowie

$$P_-^{(2)} = \left(-\frac{2+M_2}{2} - \sqrt{4D^{(2)}}, -\frac{2+M_2}{2} + \sqrt{4D^{(2)}}, -\frac{2+M_2}{2} - \sqrt{4D^{(2)}} \right),$$

wobei hier

$$D^{(2)} = D^{(2)}|_{B=1} = -3M_2^2 - 8M_2 - 4 + 4M_1.$$

Unter Verwendung der ersten Gleichung in (6) erhalten wir für den Punkt $P_+^{(2)}$ die Bedingung $M_2 = -1 \pm \sqrt{-4} \in i\mathbb{R}$ und somit einen Widerspruch zur Voraussetzung $M_2 \in \mathbb{R}$. Aus diesem Grund können also unter der Annahme $B = 1$ keine Bedingungen an die Parameter M_1 und M_2 gefunden werden, sodass $J^{(2)}$ die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = -1$ besitzt.

Analoges Vorgehen liefert für den Fall $B = -1$: $M_1 = 7/4$, $M_2 = -1$, und wir erhalten $D^{(2)}|_{B=-1} = 0$ und somit die (identischen) Gleichgewichte $P_+^{(2)} = P_-^{(2)} = (0.5, 0.5, 0.5)$.

Um nun festzustellen, ob die für die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -1$ eben berechneten Parameterwerte relevant bezüglich eines dem *Lorenz*-Attraktor ähnlichen Attraktor sind (siehe [7] für Details), bestimmen wir die jordanische Normalform von $J^{(2)}$ für $B = -1$, $M_1 = 7/4$, $M_2 = -1$ und $(x_\pm^{(2)}, y_\mp^{(2)}, x_\pm^{(2)}) = (0.5, 0.5, 0.5)$.

Zunächst gilt für diese Werte der Parameter:

$$J^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Eigenräume $E(1) = \ker(J^{(2)} - \text{Id}_3)$ und $E(-1) = \ker(J^{(2)} + \text{Id}_3)$ erhalten wir

$$E(1) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad E(-1) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Damit ist $J^{(2)}$ insbesondere diagonalisierbar und die jordanische Normalform hat folglich die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und somit kann das System für zweiperiodische Punkte nicht auf die gewünschte Normalform mit einem Eigenwert $+1$ und zwei Eigenwerten -1 zurückgeführt werden.

Im restlichen Teil dieses Abschnittes sollen analog zu den Überlegungen in § 3 die Bifurkationsbedingungen für zweiperiodische Punkte für feste Werte von B aufgestellt werden.

Für $\lambda = 1$ liefert (5) die Bedingung $D^{(2)} = 0$ und somit

$$(x_\pm^{(2)}, y_\mp^{(2)}, z_\pm^{(2)}) = (x_\pm^{(2)}, x_\pm^{(2)}, x_\pm^{(2)}),$$

sowie

$$M_1^1(M_2; B) = \frac{3}{4}(B + M_2)^2 + \frac{1}{2}(B + M_2) - \frac{1}{4}.$$

Da $D^{(2)} = 0$ für $\lambda = 1$, stimmt $M_1^1(M_2; B)$ mit (4) überein und somit existieren keine zweiperiodischen Gleichgewichte unterhalb von (4) (siehe Figure 3).

Für $\lambda = -1$ erhalten wir

$$M_1^{-1}(M_2; B) = \frac{1}{4} (3 + 6(B + M_2 + BM_2) + 5(B^2 + M_2^2)) , \quad (7)$$

wobei dies nur für $(x_+^{(2)}, y_-^{(2)}, x_+^{(2)})$ erfüllt ist, da $D^{(2)} > 0$ nach Voraussetzungen (siehe Figure 3). Es ist zu erkennen, dass $M_1^1 = M_1^{-1}$ nur im Fall $B = -1$ im Punkt $M_2 = -1$ eintreten kann.

Im letzten Fall, $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\phi}$ mit $0 < \phi < \pi$, erhalten wir durch Koeffizientenvergleich die Gleichungen

$$\begin{aligned} M_2^2 - 2 \cos \phi - B^2 &= 2x_{\pm}^{(2)} + 2y_{\mp}^{(2)} \quad \text{und} \\ 1 + 2BM_2 + 2B^2 \cos \phi &= 4x_{\pm}^{(2)} y_{\mp}^{(2)} \end{aligned}$$

und mit den zuvor berechneten Gleichgewichtspunkten

$$2 \cos \phi = M_2^2 + 2M_2 - B^2 + 2B + 2.$$

Daraus folgt mit $|B| \leq 1$ zum einen die Bedingung

$$B - 2 < M_2 < -B$$

und da $D^{(2)} \geq 0$ ergibt sich weiterhin

$$B^4 - 2B^3 - B^2(1 + M_2)^2 + 2B + M_2(2 + M_2) \geq 0.$$

Es ergibt sich für die Bifurkationskurve

$$M_1^{\phi}(M_2; B) = \frac{1}{4} (B^4 - 2B^3 + 2B^2 + 4B - 1 + M_2(4 + 6B - 2B^2 + 4M_2 - B^2M_2))$$

und es gilt $M_1^{\phi} < M_1^1$ für alle $B - 2 < M_2 < -B$ und $|B| < 1$. Da nach Voraussetzung $D^{(2)} \geq 0$ gilt, ist somit keine Torus-Bifurkation zweiperiodischer Punkte möglich.

5 Vierperiodische Punkte – Ermittlung, Existenz seltsamer Attraktoren

Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin, ein Gleichungssystem aufzustellen, dessen Lösung Bedingungen an die Parameter B, M_1, M_2 liefert, unter denen sowohl vierperiodische Punkte $(x^{(4)}, y^{(4)}, z^{(4)})$ von F existieren als auch die Jacobimatrix die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -1$ aufweist.

Zur Bestimmung der vierperiodischen Punkte suchen wir Lösungen zu $F^4(x, y, z) = (x, y, z)^T$. Dazu setzen wir $\omega_1 := M_1 + Bx + M_2z - y^2$, $\omega_2 := M_1 + By + M_2\omega_1 - z^2$, sowie $\omega_3 := M_1 + Bz + M_2\omega_2 - \omega_1^2$ und erhalten

$$F^4(x, y, z) = \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \\ M_1 + B\omega_1 + M_2\omega_3 - \omega_2^2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Für einen vierperiodischen Punkt $(x^{(4)}, y^{(4)}, z^{(4)})$, also ein Gleichgewicht von (8), definieren wir $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) := (x^{(4)}, y^{(4)}, z^{(4)})$ sowie $\kappa_4 := \omega_1$ und erhalten somit

$$(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \xrightarrow{F} (\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \xrightarrow{F} (\kappa_3, \kappa_4, \kappa_1) \xrightarrow{F} (\kappa_4, \kappa_1, \kappa_2).$$

Da $\omega_1 = M_1 + B\kappa_1 + M_2\kappa_3 - \kappa_2^2$, $\omega_2 = M_1 + B\kappa_2 + M_2\kappa_4 - \kappa_3^2$ und $\omega_3 = M_1 + B\kappa_3 + M_2\kappa_1 - \kappa_4^2$, muss also insbesondere für einen vierperiodischen Punkt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= M_1 + B\kappa_2 + M_2\kappa_4 - \kappa_3^2 \\ \kappa_2 &= M_1 + B\kappa_3 + M_2\kappa_1 - \kappa_4^2 \\ \kappa_3 &= M_1 + B\kappa_4 + M_2\kappa_2 - \kappa_1^2 \\ \kappa_4 &= M_1 + B\kappa_1 + M_2\kappa_3 - \kappa_2^2 \end{aligned} \quad (9)$$

erfüllt sein. Das Gleichungssystem (9) liefert uns Parameterwerte, unter denen vierperiodische Punkte von (2) existieren. Diese sind dann durch $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ gegeben.

Wir wollen nun Bedingungen aufstellen, die erfüllt sein müssen, damit die Jacobimatrix von F^4 die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -1$ aufweist. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\text{spur } J^{(4)} = -1, \quad \det J^{(4)} = 1 \quad \text{und} \quad \det (J^{(4)} - \text{Id}_3) = 0. \quad (10)$$

Aus der letzten Bedingung in (10) folgt nun zunächst $\lambda_1 = 1$. Die Jacobimatrix von $F^{(4)}$ ist gegeben durch

$$J^{(4)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} a_{11} &= BM_2 \\ a_{12} &= B - 2M_2\kappa_2 \\ a_{13} &= M_2^2 - 2\kappa_3 \\ a_{21} &= B(M_2^2 - 2\omega_1) \\ a_{22} &= M_2\gamma + 4\omega_1\kappa_2 \\ a_{23} &= B + M_2^3 - 2M_2\kappa_3 - 2M_2\omega_1 \\ a_{31} &= B[B + M_2^3 - 2M_1M_2(2 + M_2) - 2BM_2(\kappa_1 + M_2\kappa_1 + \kappa_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2M_2((1+M_2)\kappa_2^2 + \kappa_3(\kappa_3 - M_2(1+M_2))) \\
a_{32} &= -2B\kappa_2 - 2\gamma(M_1 + B\kappa_2 - \kappa_3^2 + M_2\omega_1) + M_2(M_2\gamma + 4\omega_1\kappa_2) \\
a_{33} &= BM_2 + M_2(B + M_2^2 - 2M_2\kappa_3 - 2M_2\omega_1) \\
& - (M_2^2 - 2\kappa_3)(M_1 + B\kappa_2 - \kappa_3^2 + M_2\omega_1) ,
\end{aligned}$$

wobei $\gamma := B - 2M_2\kappa_2$.

Da $J^{(4)} = J^{(1)} \cdot J^{(1)} \cdot J^{(1)} \cdot J^{(1)}$, folgt $\det J^{(4)} = B^4$ und wir erhalten die Bedingung $B = \pm 1$. Zudem erhalten wir nach (10) die Bedingungen

$$\begin{aligned}
-1 &= 2BM_2 + M_2(B - 2M_2\kappa_2) + 4\kappa_2\omega_1 + M_2(B + M_2^3 - 2M_2\kappa_3 - 2M_2\omega_1) \\
& - 2(M_2^2 - 2\kappa_3)(M_1 + B\kappa_2 - \kappa_3^2 + M_2\omega_1)
\end{aligned} \tag{11}$$

und

$$\begin{aligned}
0 &= B [M_2^2 + B^2(1 - 2M_2\kappa_1) + 2(-1 + 4M_1\kappa_2 - 4\kappa_2^3)\kappa_3 + 8M_2\kappa_2\kappa_3^2 \\
& - 2B(M_2(M_1 + \kappa_2 - \kappa_2^2) + (M_2^2 - 4\kappa_1\kappa_2)\kappa_3)] \\
& [B + M_2^3 - 2M_1M_2(2 + M_2) - 2BM_2(\kappa_1 + M_2\kappa_1 + \kappa_2) \\
& + 2M_2((1 + M_2)\kappa_2^2 + \kappa_3(-M_2(1 + M_2) + \kappa_3))] \\
& + [1 + 2B^3\kappa_1 - 2B(M_2 + 2\kappa_1\kappa_2) + 2\kappa_2(-2M_1 + M_2^2 + 2\kappa_2^2 - 2M_2\kappa_3) \\
& + 2B^2(M_1 - \kappa_2^2 + M_2\kappa_3)] \\
& (-1 + BM_2 + M_2(B + M_2^3 - 2M_2\kappa_3 - 2M_2\omega_1) - 2(M_2^2 - 2\kappa_3)\omega_2) \\
& - (-2B\kappa_2 - 2(B - 2M_2\kappa_2)\omega_2 + M_2(M_2(B - 2M_2\kappa_2) + 4\kappa_2\omega_1)) \\
& [M_2(2M_1 - M_2^2 - 2\kappa_2^2 + 2(1 + M_2)\kappa_3) + B^2(M_2 - 4\kappa_1\kappa_3) \\
& + B(-1 - 4M_1\kappa_3 + 4\kappa_2^2\kappa_3 + 2M_2(\kappa_1 - 2\kappa_3^2))]
\end{aligned} \tag{12}$$

Insgesamt liefern die Gleichungen (9), (11) und (12) zusammen mit $B = \pm 1$ Bedingungen an die Parameter für die Existenz eines vierperiodischen Punktes und an dessen Eigenwerte. Da die analytische Behandlung dieser Gleichungen sehr schwierig ist, werden wir knapp numerische Lösungen präsentieren. Dazu wurden die Gleichungen in MATHEMATICA gelöst. Zudem wurden die Ergebnisse auch auf Erzeugung eines Jordan Blockes überprüft. Wir erhalten vierperiodische Punkte für folgende Parameterwerte:

1. $B = 1, M_1 = 49.25683686737865, M_2 = 5.163674670524862,$
 $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = (9.07668, 8.23655, 0.0253683, -9.37628)$ (Jordan Block: ja)
2. $B = 1, M_1 = 14.074017281158126, M_2 = -2.998312488683419,$
 $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = (1.4259, 5.36849, -4.34593, -0.290342)$ (Jordan Block: nein)
3. $B = 1, M_1 = 0.1942529223496013, M_2 = 1.1180827730250489,$
 $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = (1.03043, 1.39501, 0.246929, -0.445281)$ (Jordan Block: nein)

4. $B = -1, M1 = 101.11925078595554, M2 = 5.9741700484323585,$
 $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = (13.1969, 10.0387, -0.0307781, -13.0366)$ (Jordan Block: ja)
5. $B = -1, M1 = 2.5675276464059316, M2 = -0.44571045323362946,$
 $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = (1.56291, 1.24606, 0.211991, -0.642547)$ (Jordan Block: nein)
6. $B = -1, M1 = 0.3668363162477691, M2 = 0.8674418583533194,$
 $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = (1.41514, 1.0638, -0.472976, 0.240031)$ (Jordan Block: nein)

Leider haben wir in der Nähe der Fälle mit einem Jordan Block (Fall 1. und 4.) keine Attraktoren numerisch gefunden. Aus diesem Grund vermuten wir, dass auch in der Nähe der obigen vierperiodischen Punkten kein seltsamer Attraktor existiert.

6 Lyapunov Exponenten

In diesem Abschnitt werden wir auf die numerische Berechnung der Lyapunov Exponenten $\lambda_{1,2,3}$ für die Werte $B = 0.7$ und $B = -0.7$ eingehen (Definition siehe [8]). Die Berechnung der Lyapunov Exponenten wurde in MATLAB auf Basis des in [13] diskutierten Algorithmus durchgeführt. Dazu wurde sowohl für $B = 0.7$ als auch $B = -0.7$ der Parameterraum (M_1 und M_2) mit einer Schrittweite von 10^{-4} unterteilt. Um Transienten zu vermeiden, wurden für jeden dieser Parameterpunkte zuerst 10^4 Iterationen von (2) für einen zufälligen Startwert nahe Null durchgeführt und das Ergebnis als Startpunkt für die weiteren Berechnungen verwendet. Insgesamt wurden dann zur Berechnung des Lyapunov Exponenten für jeden Parameterpunkt 10^6 weitere Iterationen durchgeführt. Da nach Definition die Summe der Lyapunov Exponenten gleich dem Logarithmus des Absolutbetrags der Kontraktionsrate der Abbildung sein muss, in unserem Fall $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \ln(|B|) \approx -0.35667$, war dies ein Maß für die Genauigkeit unserer Berechnungen, wobei der mittlere Fehler bei ungefähr 10^{-6} lag. Es sei angemerkt, dass diese Berechnungen nur einmal pro Parameterpunkt durchgeführt wurden. Darüber hinaus wurde auch gleichzeitig für jeden Punkt die Lyapunov Dimension \dim_L berechnet. Die Lyapunov Dimension, auch *Kaplan-York* Dimension genannt, wurde von J. Kaplan und J. York in 1979 als Vermutung für die Dimension eines Attraktors eingeführt [14, 15]. In der Originalarbeit [14] wurde diese Vermutung für zweidimensionale Abbildungen eingeführt und später auch bewiesen [16]. Generell stimmt die Aussage für höhere Dimensionen nicht, aber diese Dimension ist im Allgemeinen gleich der Informationsdimension und kann eine obere Abschätzung für die *Hausdorff* Dimension liefern [17, 18, 19]. Sie ist über die Lyapunov Exponenten wie folgt definiert:

$$\dim_L := j + \frac{\sum_{k=1}^j \lambda_k}{|\lambda_{j+1}|},$$

wobei $j \in \mathbb{N}$ der größte Index ist, sodass für die geordneten Lyapunov Exponenten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ gilt

$$\sum_{k=1}^j \lambda_k \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{j+1} \lambda_k < 0.$$

In Abbildung 4 und 6 sind die Ergebnisse der numerischen Berechnungen für $B = 0.7$ bzw. $B = -0.7$ präsentiert. Zudem sind für ausgewählte Parameterwerte Attraktoren mit nicht ganzzahliger (numerischer) Lyapunov Dimension dargestellt. Die Farbkodierung ist gegeben durch:

- Weiß: keine Konvergenz,
- Blau: $\lambda_{1,2,3} < 0$,
- Grün: $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_{2,3} < 0$,
- Rot: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geq 0$ und $\lambda_3 < 0$.

Für $B = 0.7$ ist der (numerisch) größte Lyapunov Exponent ungefähr $\lambda_1 = 0.216$ für $M_1 = 0.578$ und $M_2 = 0.577$ mit einer Lyapunov Dimension von 2.4026. Im Falle $B = -0.7$ erhalten wir $\lambda_1 = 0.198$ für $M_1 = 0.601$ und $M_2 = 0.164$ mit einer Lyapunov Dimension von 2.402.

Abschließend wurden einmal für $B = 0.7$ und $M_1 = 0$, sowie für $B = -0.7$ und $M_2 = 0$ die Evolution der Attraktoren in (2) in Abhängigkeit von M_2 bzw. M_1 (entlang der gestrichelten gelben Linien in Abbildung 4 und 6) numerisch untersucht. Es sei angemerkt, dass ersterer Fall schon zuvor diskutiert wurde (siehe Abbildung 2 in [6]) und darüber hinaus in [20] die Existenz eines diskreten *Shilnikov* Attraktors diskutiert wurde. Des Weiteren sei angemerkt, dass der seltsame Attraktor in Abbildung 7 (i) auch in Abbildung (1) für z.B. $B = 0.7$, $M_1 = 0.3$, $M_2 = -0.5$ auftritt und *Zerg-Schiff* genannt wird [20].

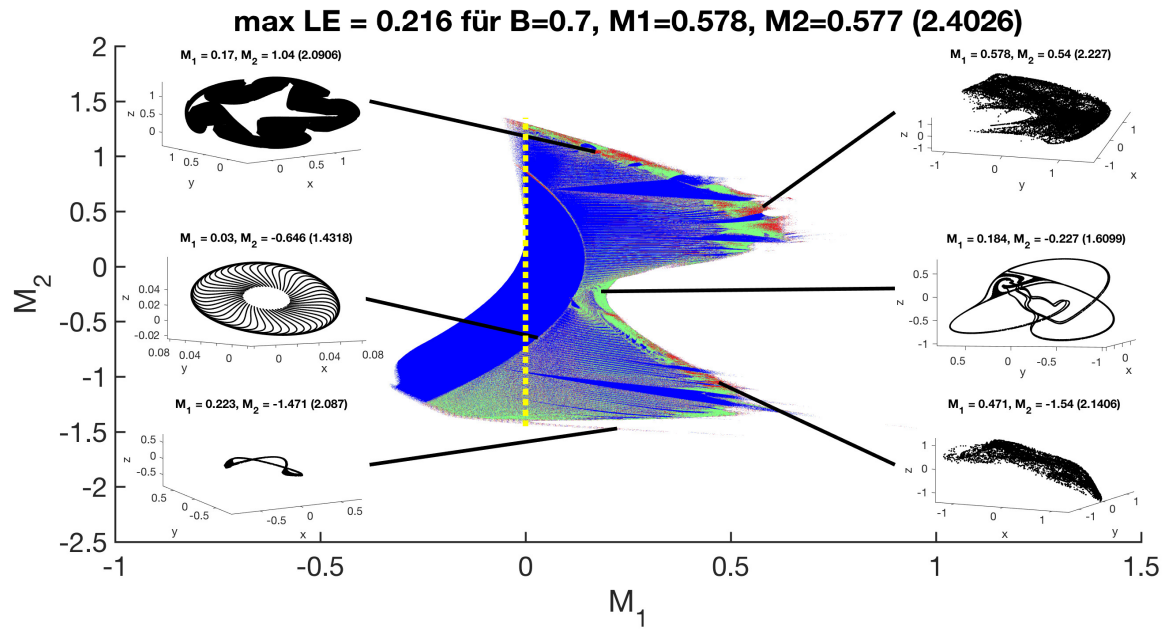


Abbildung 4: Lyapunov Exponenten der Abbildung (2) für $B = 0.7$. Innere Abbildungen zeigen exemplarische Attraktoren mit nicht ganzzahliger Lyapunov Dimension. Siehe Text für Erläuterung des Farbschemas.

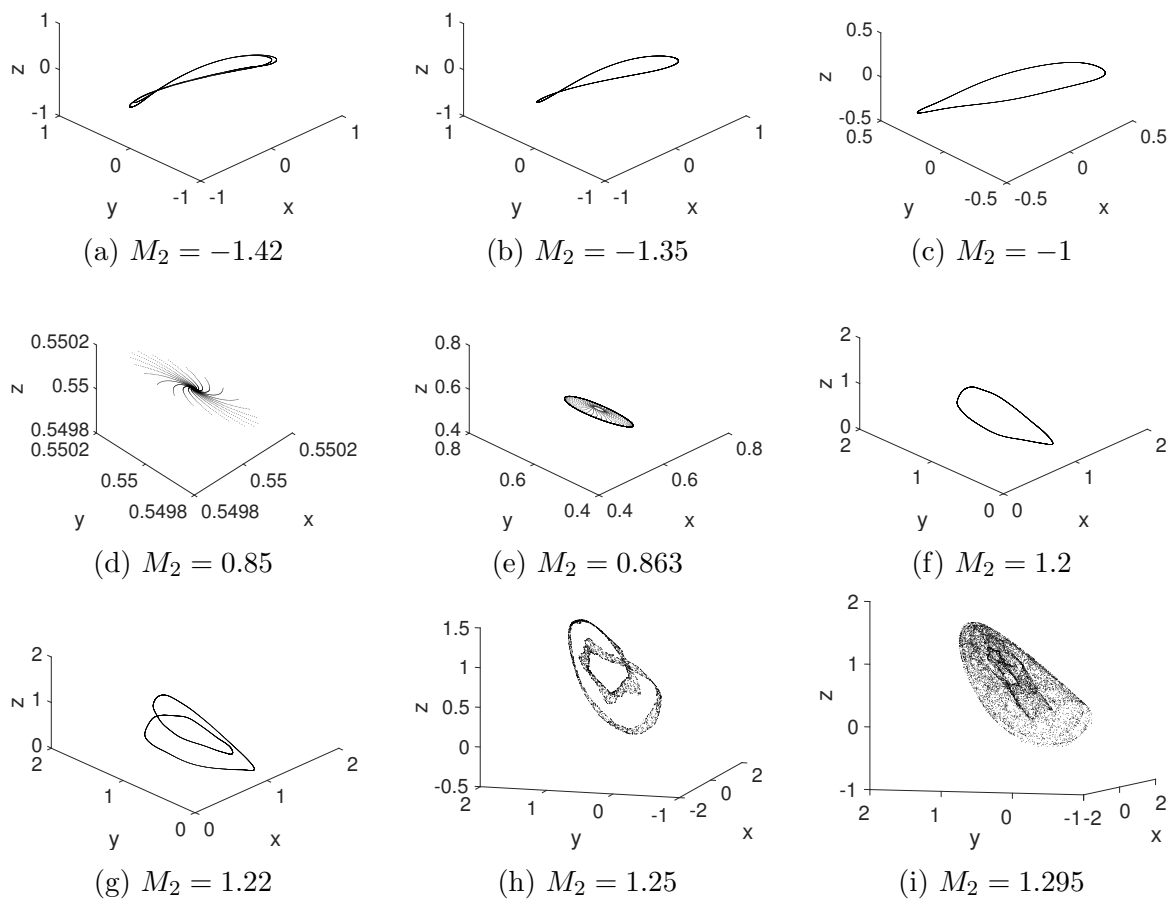


Abbildung 5: Entwicklung der Attraktoren in (2) für $B = 0.7$ und $M_1 = 0$ fest (vergleiche gelb gestrichelte Linie in Abbildung 4). (a) Doppelte geschlossene invariante Kurve. (b) - (c) Einfache invariante Kurve. (d) Stabiler Fixpunkt. (e) - (f) Geburt einer invariante Kurve. (g) Dopplung der invariante Kurve. (h) Zerfall der Kurve und einsetzen von Chaos. (i) *Shilnikov* Attraktor.

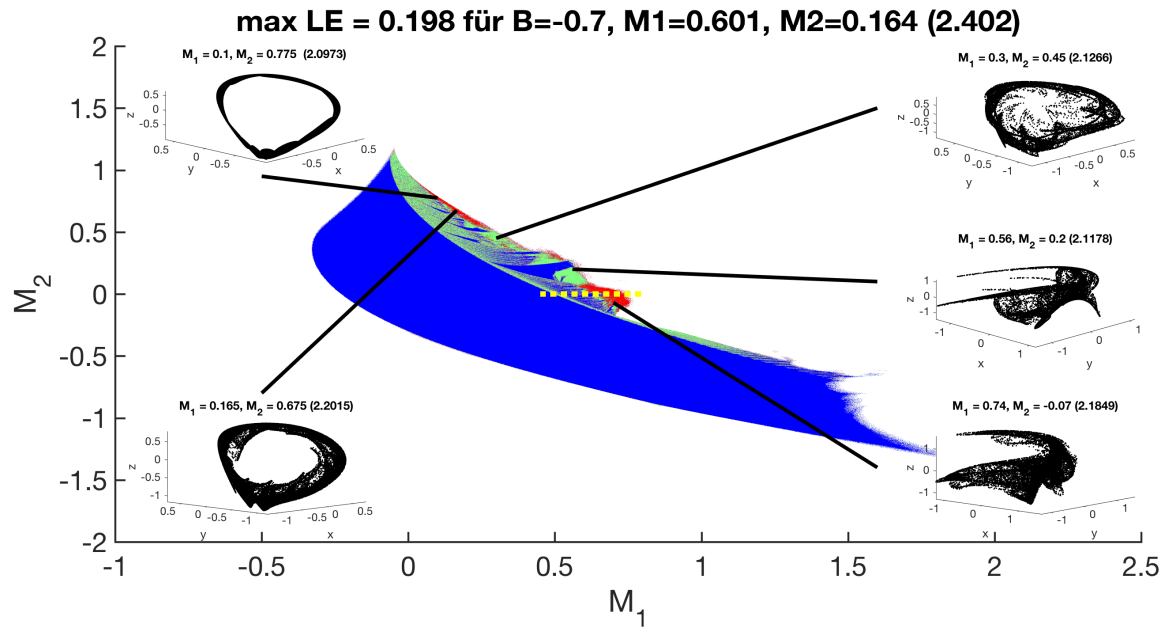


Abbildung 6: Lyapunov Exponenten der Abbildung (2) für $B = -0.7$. Innere Abbildungen zeigen exemplarische Attraktoren mit nicht ganzzahliger Lyapunov Dimension. Selbes Farbschema wie in Abbildung 4.

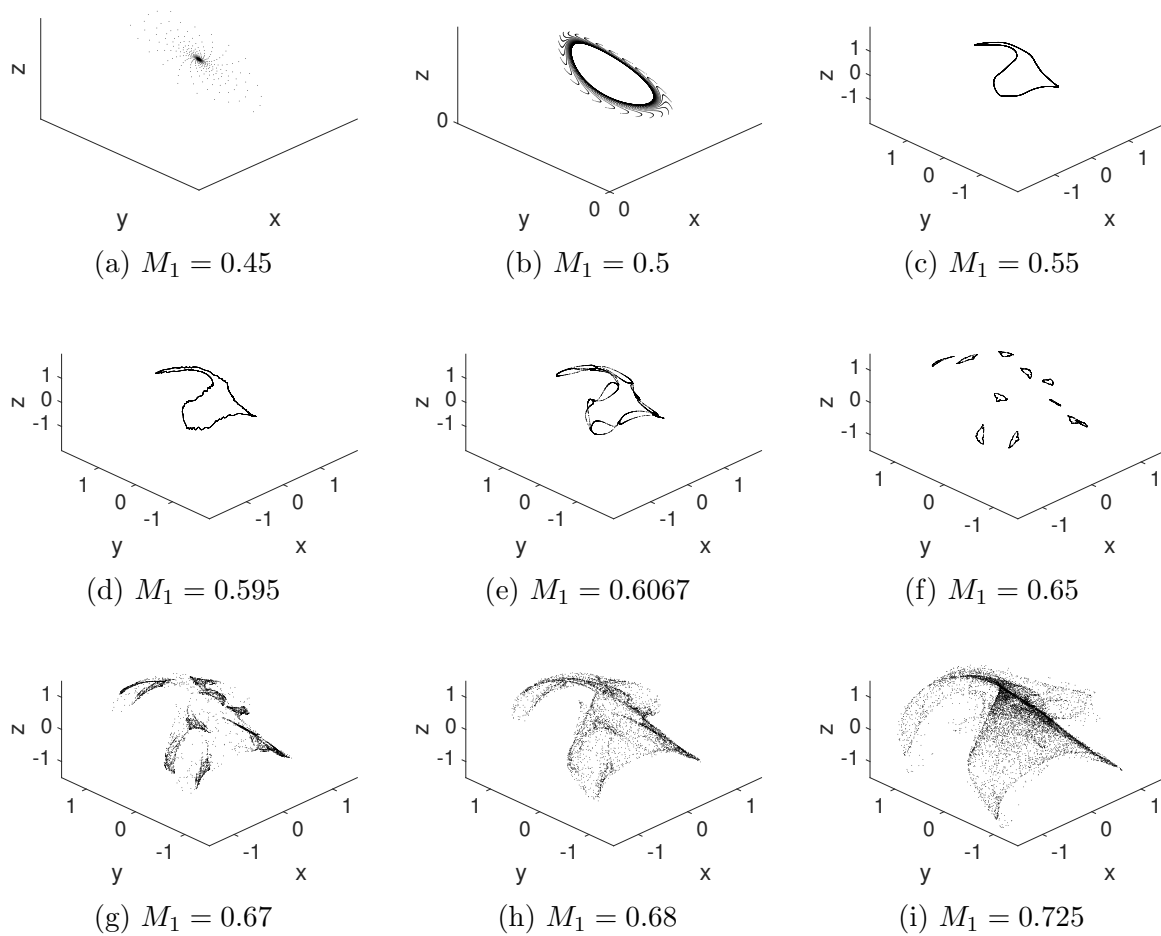


Abbildung 7: Entwicklung der Attraktoren in (2) für $B = -0.7$ und $M_2 = 0$ fest (vergleiche gelb gestrichelte Linie in Abbildung 6). (a) Stabiler Fixpunkt. (b) - (c) Invariante Kurve. (d) Zerfall der Kurve. (e) Trennung der Komponenten eines Periode 10 Attraktors. (f) Geschlossene periodische Kurven mit 10 Komponenten. (g) Kollision der Komponenten. (h) Geburt eines seltsamen Attraktors. (i) Seltsamer Attraktor.

7 Diskussion und Ausblick

In dieser Ausarbeitung haben wir die Dynamik des Systems (2) untersucht und Ergebnisse präsentiert, wie die Bifurkationskurven oder Berechnungen der Lyapunov-Exponenten, die zum Verständnis der Dynamik des Systems beitragen.

Dabei sei zu bemerken, dass wir beispielsweise die Bifurkationsdiagramme lediglich für feste Werte des Parameters B erstellt haben. Darauf aufbauend könnten noch für weitere Werte von B Bifurkationsdiagramme erstellt werden. Außerdem wäre ein dreidimensionaler Plot denkbar, bei dem die Parameterkurven M_1^1, M_1^{-1} und M_1^ϕ in Abhängigkeit von M_2 und in Abhängigkeit von B geplottet werden. Dadurch könnten Parameterbereiche für stabile Fix- oder zweiperiodische Punkte beschrieben werden. Wichtig ist hierbei anzumerken, dass der Wert $B = 0$ eine besondere Rolle einnimmt, da in diesem Fall Abbildung (2) nicht als Inverse von (1) angesehen werden kann. Weiterhin könnten neben den von uns durchgeführten Stabilitätsuntersuchungen für Fix- und zweiperiodische Punkte auch entsprechende Betrachtungen für vierperiodische Punkte folgen.

Seltsame Attraktoren, wie der *Shilnikov*- oder *Zerg-Schiff*-Attraktor, konnten wir in dieser Ausarbeitung numerisch ermitteln. Die Existenz eines dem *Lorenz*-Attraktor ähnlichen Attraktors konnten wir allerdings nicht nachweisen. Hier stellt sich die Frage, ob überhaupt solch ein Attraktor im System (2) existiert? Zur Klärung dieser Frage wären hier im Wesentlichen zwei weitere Vorgehensweisen denkbar. Das Sammeln von (weiteren) Indizien der Nichtexistenz eines dem *Lorenz*-Attraktor ähnlichen Attraktors im System (2) und der Beweis der Nichtexistenz wäre eine Vorgehensweise. Was wären entsprechende Ansätze zum Beweis der Nichtexistenz? Spielt die Invertierung der Abbildung (2) dabei eine Rolle?

Eine andere Möglichkeit wäre, die Existenz eines dem *Lorenz*-Attraktor ähnlichen Attraktors weiter zu überprüfen. Ermittelt haben wir in dieser Ausarbeitung, ob Bifurkationen von Fixpunkten oder von zwei- oder vierperiodischen Punkten zu Attraktoren führen können, die dem *Lorenz*-Attraktor ähnlich sind. Können Bifurkationen von Punkte höherer Periode als die in § 5 zu *Lorenz*-ähnlichen Attraktoren führen? Wie hoch wäre eine solche entsprechende Periode?

Da der Aufwand unserer in Anlehnung an [7] durchgeführten Rechnungen mit wachsender Periode anstieg und diese so bei den vierperiodischen Punkten größtenteils nur noch numerisch möglich waren, stellt sich die Frage, ob für höhere periodische Punkte die entsprechenden Rechnungen überhaupt noch analytisch bzw. numerisch durchführbar sind? Sind die Erkenntnisse aus [7] also überhaupt für höhere als vierperiodische Punkte anwendbar?

Es sei weiterhin angemerkt, dass der Nachweis von dem *Lorenz*-Attraktor ähnlichen Attraktoren mittels [7] auf dem im *Shimizu-Morioka*-System existierenden seltsamen Attraktor beruht. Dieser wurde analytisch allerdings noch nicht nachgewiesen [21].

References

- [1] Michel Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. In *The Theory of Chaotic Attractors*, pages 94–102. Springer, 1976.
- [2] Yuri A Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*, volume 112. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] David A Russell, James D Hanson, and Edward Ott. Dimension of strange attractors. *Physical Review Letters*, 45(14):1175, 1980.
- [4] SV Gonchenko, II Ovsyannikov, C Simó, and D Turaev. Three-dimensional hénon-like maps and wild lorenz-like attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(11):3493–3508, 2005.
- [5] SV Gonchenko, AS Gonchenko, II Ovsyannikov, and DV Turaev. Examples of lorenz-like attractors in hénon-like maps. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 8(5):48–70, 2013.
- [6] Alexander Gonchenko, Sergey Gonchenko, Alexey Kazakov, and Dmitry Turaev. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(08):1440005, 2014.
- [7] AL Shil’nikov, LP Shil’nikov, and DV Turaev. Normal forms and lorenz attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3:1123–1123, 1993.
- [8] Clark Robinson. *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*. CRC press, 1998.
- [9] Robert Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley Publ. Co., 1989.
- [10] Wolfgang Metzler. *Nichtlineare Dynamik und Chaos: Eine Einführung*. Springer-Verlag, 2013.
- [11] David Ruelle and Floris Takens. On the nature of turbulence. *Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25*, 12:1–44, 1971.
- [12] Lluís Alsedà and Sara Costa. On the definition of strange nonchaotic attractor. *Fundamenta Mathematicae*, 206(1):23–39, 2009.
- [13] J-P Eckmann and David Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. In *The theory of chaotic attractors*, pages 617–653. Springer, 1985.
- [14] James L Kaplan and James A Yorke. Chaotic behavior of multidimensional difference equations. In *Functional differential equations and approximation of fixed points*, pages 204–227. Springer, 1979.

- [15] Paul Frederickson, James L Kaplan, Ellen D Yorke, and James A Yorke. The liapunov dimension of strange attractors. *Journal of differential equations*, 49(2):185–207, 1983.
- [16] Lai-Sang Young. Dimension, entropy and lyapunov exponents. *Ergodic theory and dynamical systems*, 2(1):109–124, 1982.
- [17] François Ledrappier. Some relations between dimension and lyapounov exponents. *Communications in Mathematical Physics*, 81(2):229–238, 1981.
- [18] Peter Grassberger and Itamar Procaccia. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 9(1-2):189–208, 1983.
- [19] Denis J Evans, EGD Cohen, Debra J Searles, and F Bonetto. Note on the kaplan–yorke dimension and linear transport coefficients. *Journal of Statistical Physics*, 101(1-2):17–34, 2000.
- [20] AS Gonchenko, SV Gonchenko, and LP Shilnikov. Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps, nelin, 2012.
- [21] Maciej J Capiński, Dmitry Turaev, and Piotr Zgliczyński. Computer assisted proof of the existence of the lorenz attractor in the shimizu–morioka system. *Nonlinearity*, 31(12):5410, 2018.