J. Gamst 12. März 2012

Vorlesung im SS 2012
Komplexe Multiplikation

Mo 10-12 in MZH 6340, Do 14-16 in MZH 7200
Übungen: Mi 8-10 in MZH 6340

Elliptische Kurven über $\mathbb{C}$ haben eine Darstellung $E \cong \mathbb{C}/\Lambda$ mit einem Gitter $\Lambda = \mathbb{Z}z \oplus \mathbb{Z}$ für ein z in der oberen Halbebene. Die Endomorphismen von E sind gegeben durch $z \in \mathbb{C}$ mit $z\Lambda \subset \Lambda$ - solche z gehören zu Λ und genügen einer quadratischen Ganzheitsgleichung. Im Allgemeinen hat man End (E) $= \mathbb{Z}$, End (E) kann aber auch eine Ordnung in einem imaginär quadratischen Zahlkörper K sein: in dem Fall sagt man, dass E komplexe Multiplikation hat.

Am übersichtlichsten sind die Verhältnisse, wenn End (E) der Ring $\mathcal{O}_K$ aller ganzen Zahlen in K ist. Ist h_K die Klassenzahl von K, so gibt es bis auf Isomorphie gerade h_K elliptische Kurven E mit End (E) $= \mathcal{O}_K$. Deren j-Invarianten sind dann ganze algebraische Zahlen, welche den Hilbertschen Klassenkörper H von K erzeugen, d.h. die maximale unverzweigte abelsche Erweiterung, welche ja Gal (H/K) $\cong$ Klassengruppe von K erfüllt. Alle weiteren abelschen Erweiterungen von K entstehen dann aus H durch Hinzufügen der Koordinaten von Torsionspunkten von E.

Ingesamt liegt hier also eine explizite Version der Klassenkörpertheorie vor, angereichert mit vielen Einzeltatsachen, die auf dem Yoga der elliptischen Modulfunktionen beruhen.

In der Vorlesung werde ich das Nötige über Elliptische Kurven entwickeln und Grundkenntnisse der Algebraischen Zahlentheorie voraussetzen, nicht jedoch der Klassenkörpertheorie.

Literatur:

H. Cohen / D. Stevenhagen: "Computational Class Field Theory", in MSRI #44, Cambridge 2008

D. Cox: "Primes of the form $x^2 + ny^2$", John Wiley 1989

R. Schertz: "Complex Multiplication", Cambridge 2010

J.-P. Serre: "Complex Multiplication", in Cassels / Fröhlich: "Algebraic Number Theory", Academic Press 1967